Esercitazioni del 21-22-23 Maggio di Geometria A

Università degli Studi di Trento
Corso di laurea in Matematica
A.A. 2017/2018

Matteo Bonini
matteo.bonini@unitn.it

Esercizio 1
Esercizio 2 delle esercitazioni del 24-25 Maggio 2016.

Soluzione dell'esercizio 1
Si vedano le soluzioni sul sito web del corso.

Esercizio 2
Si consideri $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ con coordinate (x, y) e si consideri la curva definita da

$$C_a : f_a(x, y) = x + xy + y^3 + a$$

dove $a \in \mathbb{R}$.

(i) Si ricavino i punti singolari di C_a e della sua chiusura proiettiva e si classifichino.

(ii) Si dimostri che esiste un valore di a per cui la curva è riducibile.

(iii) Si ricavino gli asintoti di C_a.

(iv) Si ricavino le intersezioni tra C_0 e C_2 e delle loro chiusure proiettive.

(v) Si ricavino le intersezioni tra $\mathcal{C} : f(x, y) = y^2 + x - x^3$ e $\mathcal{D} : g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ e delle loro chiusure proiettive.

Soluzione dell'esercizio 2
Calcoliamo le derivate di f_a per cercare i punti singolari affini

$$\frac{\partial f_a}{\partial x} = y + 1$$
$$\frac{\partial f_a}{\partial y} = x + 3y^2$$

per cui abbiamo che l'unica singolarità possibile è $P = (-3, -1)$, che appartiene alla curva solo per $a = -1$. Consideriamo quindi il caso $a = 1$, abbiamo che la molteplicità in $(0, 0)$ della curva definita dal polinomio

$$f_1(x - 3, y - 1) = x - 3 + xy + 3 - x - 3y + y^3 - 3y^2 + 3y - 1 + 1 = y^3 - 3y^2 + xy$$

è uguale a quella di C_1 in P, per cui la singolarità si tratta di un punto doppio ordinario (con tangenti principali date da $y + 1 = 0$ e $x - 3y = 0$). Calcoliamo ora i punti all'infinito di C_a, partiamo omogeneizzando l'equazione per trovare quella di $\bar{C}_a$

$$\bar{C}_a : F(x_0, x_1, x_2) = x_0^2 x_1 + x_0 x_1 x_2 + x_2^3 + a x_0^3$$

da cui ricaviamo che la curva ha un'unico punto all'infinito $P_\infty = [0:1:0]$. Se deomogeneizziamo rispetto ad x_1, ovvero poniamo $w_i = \frac{x_i}{x_1}$ per $i = 0, 2$, otteniamo l'equazione affine della curva dove il punto P_∞ corrisponderà all'origine

$$f'(w_0, w_2) = w_0^2 + w_0 w_2 + w_2^3 + a w_0^3.$$

Visto che stiamo studiando l'origine possiamo dire che questa ha molteplicità 2 e che le tangenti principali sono date da $w_0 = 0$ e $w_0 + w_2 = 0$, di conseguenza abbiamo che P_∞ è un punto doppio ordinario. Abbiamo quindi che per $a \neq -1$ il punto all'infinito è l'unico punto singolare, mentre per $a = 1$ abbiamo che P e P_∞ sono due punti doppi ordinari. Per il caso $a = 1$ abbiamo anche la riducibilità della curva, infatti la cubica si spezza in una retta e una conica che si incontrano nel punto singolare

$$f_1(x, y) = x + xy + y^3 + 1 = x(y + 1) + (y + 1)(y^2 - y + 1) = (y + 1)(y^2 - y + x + 1).$$

Per quanto riguarda gli asintoti abbiamo che, visto che le tangenti principali in P_∞ sono $x_0 = 0$ e $x_0 + x_2 = 0$, l'unico asintoto è dato dalla disomogenizzazione della seconda retta in questione, ovvero $y + 1 = 0$. Infine abbiamo che C_0 e C_2 non si intersecano in alcun punto del piano affine (basta sottrarre le loro equazioni) e quindi che condividono solo P_∞.

Per trovare le intersezioni tra $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ calcoliamone il risultante rispetto alla variabile x

$$R_x(f, g) = \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & y^2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & y^2 \\ 1 & 0 & y^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & y^2 - 1 \end{pmatrix} = y^6$$

da cui abbiamo che i punti di intersezione tra le due curva devono avere ascissa nulla. Sostituendo $y = 0$ nell'equazione delle due curve otteniamo che $f(x, 0) = -x(x^2 - 1)$ e $g(x, 0) = (x^2 - 1) = 0$ da cui ricaviamo che le intersezioni sono $P_1 = (1, 0)$ e $P_2 = (-1, 0)$.

Esercizio 3

Si consideri il piano complesso $\mathbb{A}^2$ con coordinate (x, y) e si la curva

$$\mathcal{C}: \ f(x, y) = (1 - x)^2 x^2 - y^4 = 0$$

1. Si ricavino i punti singolari della curva e della sua chiusura proiettiva.
2. Per ogni punto singolare P si ricavi la molteplicità del punto per la curva, le tangenti principali, la molteplicità con cui esse tagliano la curva e gli eventuali altri punti di intersezione tra le tangenti e la curva.
3. Ricavare gli eventuali punti di flesso di $\mathcal{C}$.

Soluzione dell'esercizio 3

Sviluppando l'equazione di f abbiamo

$$f(x, y) = (x^2 - 2x + 1)x^2 - y^4 = x^4 - y^4 - 2x^3 + x^2 = 0.$$

Calcoliamo le derivate di f per cercare i punti singolari affini

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 6x^2 + 2x = 2x(2x^2 - 3x + 1) = 2x(2x - 1)(x - 1)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3$$

per cui abbiamo come possibili punti singolari $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (1,0)$ e $P_3 = (\frac{1}{2}, 0)$ ma quest'ultimo non è un punto della curva. La molteplicità di $\mathcal{C}$ nell'origine è 2 e l'unica tangente principale è $x = 0$ che ha molteplicità d'intersezione con la curva in $\mathcal{O}$ pari 4 a visto che $f(0,t) = t^4$ (chiaramente non ci possono essere altre intersezioni tra tale retta e la curva in virtù del teorema di Bézout). Caloliamo invece la molteplicità in $\mathcal{O}$ della curva definita dal polinomio

$$f(x+1,y) = x^2(1+x)^2 - y^4 = x^4 - y^4 + 2x^3 + x^2 = 0$$

è uguale a quella di $\mathcal{C}$ in P_2, per cui la singolarità si tratta di un punto doppio con tangente principale $x - 1 = 0$ (con molteplicità in P_2 pari a 4). Calcoliamo ora i punti all'infinito di $\mathcal{C}$, partiamo omogeneizzando l'equazione per trovare quella di $\bar{C}$

$$\bar{C}_a : F(x_0, x_1, x_2) = x_1^4 - x_2^4 - 2x_0x_1^3 + x_0^2x_1^2 = 0$$

da cui ricaviamo che la curva ha come punti all'infinito $Q_1^\infty = [0,1,0]$, $Q_2^\infty = [0,-1,0]$, $Q_3^\infty = [0,i,0]$ e $Q_4^\infty = [0,-i,0]$. Visto che la retta $x_0 = 0$ ha 4 intersezioni con la curva tutti i punti all'infinito saranno lisci (altrimenti andremmo a contraddire il teorema di Bézout). Le derivate seconde di f sono

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2} &= 12x^2 - 12x^+2 = 12(2x^2 - 2x + 1) = 3(2x - 1 - i)(2x - 1 + i) \\
\frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2} &= 12y^2 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x \partial y} = 0
\end{aligned}$$

da cui ricaviamo l'Hessiana

$$\mathcal{H}(x,y) = \det \begin{pmatrix} 12(2x^2 - 2x + 1) & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix} = 36y^2(2x - 1 - i)(2x - 1 + i).$$

che è chiaramente prodotto di tre rette. Se andiamo a sostituire $y = 0$ in f abbiamo che

$$f(x,0) = x^2(x-1)^2$$

che ha come soluzione i due punti singolari della curva, che quindi non possono essere di flesso. Se invece consideriamo le altre due rette avremo per ciascuna 4 distinti punti di flesso.

Esercizio 4

Si consideri in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ dotato delle coordinate (x_0, x_1, x_2, x_3) la quadrica

$$Q : x_0^2 + 4x_2 + 3x_1^2 + 4x_3^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0$$

(i) Determinare la forma canonica di Q.

(ii) Determinare una proiettività che porti Q in forma canonica.

Soluzione dell'esercizio 4

La matrice della forma bilineare associata a Q è data da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo gli autovalori di A

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda-\sqrt{5})(\lambda+\sqrt{5})(\lambda-2-\sqrt{5})(\lambda-2+\sqrt{5})$$

quindi i quattro autovalori sono dati da $\lambda_1 = \sqrt{5}$, $\lambda_2 = -\sqrt{5}$, $\lambda_3 = 2+\sqrt{5}$ e $\lambda_4 = 2-\sqrt{5}$ con rispettivi autovettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Visto che abbiamo 2 autovalori positivi e 2 negativi la forma canonica della quadrica proiettiva sarà $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$. L'inversa della seguente matrice matrice (a meno di costanti di proporzionalità) darà la trasformazione cercata

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) & 0 & \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) & 0 & \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che quindi sarà data da

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & 10(5+\sqrt{5}) & 0 & \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & 10(5+\sqrt{5}) & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & 10(5-\sqrt{5}) & 0 & \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & 10(5-\sqrt{5}) & \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5
Si consideri il piano complesso $\mathbb{A}^2$ con coordinate (x,y) e si la curva

$$\mathcal{C}:\ f(x,y) = x^4 + y^4 - xy^2 = 0$$

1. Si ricavino i punti singolari della curva e della sua chiusura proiettiva.
2. Per ogni punto singolare P si ricavi la molteplicità del punto per la curva, le tangenti principali, la molteplicità con cui esse tagliano la curva e gli eventuali altri punti di intersezione tra le tangenti e la curva.
3. Ricavare gli asintoti di C e le tangenti principali nei suoi punti all'infinito.

Soluzione dell'esercizio 5
Calcoliamo le derivate di f per cercare i punti singolari affini

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - y^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 2xy = 2y(2y^2 - x)$$

da cui abbiamo per $y = 0$ come unico punto singolare $P_1 = (0,0)$. Se invece imponiamo che $2y^2 = x$ otteniamo dalla prima equazione che $8x^3 - x = x(8x^2 - 1) = 0$ e quindi abbiamo come candidati punti singolari $P_2 = (\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt[4]{2}})$ e $P_3 = (\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt[4]{2}})$ che però non appartengono alla curva. La molteplicità di $\mathcal{C}$ nell'origine di $x = 0$ è 3 e le tangenti principali hanno equazione $x = 0$ e $y = 0$. La molteplicità d'intersezione di $x = 0$ con la curva in $\mathcal{O}$ pari 4 a visto che $f(0, t) = t^4$ (chiaramente non ci possono essere altre intersezioni tra tale retta e la curva in virtù del teorema di Bézout). Per quanto riguarda invece la molteplicità d'intersezione della curva con $y = 0$ abbiamo anche in questo caso che essa è esattamente 4. Calcoliamo ora i punti all'infinito di $\mathcal{C}$, partiamo omogeneizzando l'equazione per trovare quella di $\bar{C}$

$$\bar{C}_a : F(x_0, x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 - x_0 x_1 x_2^2 = 0$$

da cui ricaviamo che la curva ha come punti all'infinito $Q_1^\infty = [0, \sqrt{i}, 1]$, $Q_2^\infty = [0, -\sqrt{i}, 1]$, $Q_3^\infty = [0, i\sqrt{i}, 1]$ e $Q_4^\infty = [0, -i\sqrt{i}, 1]$. Visto che la retta $x_0 = 0$ ha 4 intersezioni con la curva tutti i punti all'infinito saranno lisci (altrimenti andremmo a contraddire il teorema di Bézout). Per cercare le tangenti nei punti all'infinito calcoliamo le derivate di F

$$\frac{\partial F}{\partial x_0} = -x_1 x_2^2$$
$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 4x_1^3 - x_0 x_2^2$$
$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 4x_2^3 - 2x_0 x_1 x_2$$

da cui otteniamo le equazioni delle tangenti rispettivamente di Q_1, Q_2, Q_3 e Q_4

$$r_1 : \sqrt{i}x_0 + 4 \sqrt[3/2]{i}(x_1 - \sqrt{i}) + 4x_2 = 0$$
$$r_2 : \sqrt{i}x_0 - 4 \sqrt[3/2]{i}(x_1 + \sqrt{i}) + 4x_2 = 0$$
$$r_3 : \sqrt{i}x_0 - 4i \sqrt[3/2]{i}(x_1 + i\sqrt{i}) + 4x_2 = 0$$
$$r_4 : \sqrt{i}x_0 + 4i \sqrt[3/2]{i}(x_1 - i\sqrt{i}) + 4x_2 = 0$$

e visto che nessuna di esse è la retta $x_0 = 0$ abbiamo che i quattro asintoti sono dati dalle rette in questione deomogenizzate rispetto ad x_0.