Risultati recenti sulle varietá di Fano

Marco Andreatta

Dipartimento di Matematica
Trento

Teorema di uniformizzazione Riemann-Poincaré

Teorema di uniformizzazione Riemann-Poincaré

X varietá complessa, proiettiva e liscia:

Se $dimX := n = 1$ esiste una metrica hermitiana su TX con curvatura costante k tale che

$k > 0$	$k = 0$	$k < 0$
$X = S^2 = \mathbb{P}^1$	$X = \mathbb{C}/\Gamma$	$X = \Delta/\pi_1(X)$

In dimensione superiore?
Come si generalizza la prima classe?

Positivitá del fibrato tangente

`Diverse` nozioni di positivitá:

- TX é ampio

  (qualunque definizione)

Positivitá del fibrato tangente

`Diverse` nozioni di positivitá:

- TX é ampio

  (qualunque definizione)

- $\mathcal{E} \hookrightarrow TX$ é ampio

  ($\mathcal{E}$ localmente libero di rango r)

Positivitá del fibrato tangente

`Diverse` nozioni di positivitá:

- TX é ampio

  (qualunque definizione)

- $\mathcal{E} \hookrightarrow TX$ é ampio

  ($\mathcal{E}$ localmente libero di rango r)

- $\exists f : \mathbb{P}^1 \to X$ e f^*TX é ampio
  $\sim X$ razionalmente connesso

  (i.e. $\forall x, y \in X, \exists f : \mathbb{P}^1 \to X$ per essi)

Positivitá del fibrato tangente

`Diverse` nozioni di positivitá:

- TX é ampio

  (qualunque definizione)

- $\mathcal{E} \hookrightarrow TX$ é ampio

  ($\mathcal{E}$ localmente libero di rango r)

- $\exists f : \mathbb{P}^1 \to X$ e f^*TX é ampio
  $\sim X$ razionalmente connesso

  (i.e. $\forall x, y \in X, \exists f : \mathbb{P}^1 \to X$ per essi)

- TX non genericamente seminegativo
  i.e. $\exists \mathcal{E} \hookrightarrow TX$ e $\{C_t\}$ famiglia di curve

  con $c_1(\mathcal{E})C_t > 0$ e $\{C_t\}$ copre X
  $\sim \exists f : \mathbb{P}^1 \to X$ e f^*TX é nef.

lo spazio proiettivo

TX é ampio $\Longleftrightarrow X = \mathbb{P}^n$ $[Mori79]$

lo spazio proiettivo

TX é ampio $\Longleftrightarrow X = \mathbb{P}^n [Mori79]$

$\mathcal{E} \hookrightarrow TX$ ampio $\Longleftrightarrow X = \mathbb{P}^n [An - Wis01]$

lo spazio proiettivo

TX é ampio $\Longleftrightarrow X = \mathbb{P}^n [Mori79]$

$\mathcal{E} \hookrightarrow TX$ ampio $\Longleftrightarrow X = \mathbb{P}^n [An - Wis01]$

X é Fano ovvero

$-K_X = detTX$ é ampio

le attrici del varietá e loro relazioni

TXé ampio $\Longleftrightarrow X = \mathbb{P}^n [Mori79]$

$\mathcal{E} \hookrightarrow TX$ ampio $\Longleftrightarrow X = \mathbb{P}^n [An - Wis01]$

Xé Fano ovvero

$-K_X = detTX$é ampio

X razionalmente connessa

TX non genericamente seminegativo

X é unirigata

$X \sim$ fibrazione in varietá di Fano

le attrici del varietá e loro relazioni

TXé ampio $\Longleftrightarrow X = \mathbb{P}^n [Mori79]$

$\mathcal{E} \hookrightarrow TX$ ampio $\Longleftrightarrow X = \mathbb{P}^n [An - Wis01]$

Xé Fano ovvero

$-K_X = detTX$é ampio

X razionalmente connessa

TX non genericamente seminegativo

X é unirigata

$X \sim$ fibrazione in varietá di Fano

le attrici del varietá e loro relazioni

TXé ampio $\Longleftrightarrow X = \mathbb{P}^n [Mori79]$

$\mathcal{E} \hookrightarrow TX$ ampio $\Longleftrightarrow X = \mathbb{P}^n [An - Wis01]$

Xé Fano ovvero

$-K_X = detTX$é ampio

Mori 82

X razionalmente connessa

X é unirigata

TX non genericamente seminegativo

$X \sim$ fibrazione in varietá di Fano

le attrici del varietá e loro relazioni

TX é ampio $\Longleftrightarrow X = \mathbb{P}^n [Mori79]$

$\mathcal{E} \hookrightarrow TX$ ampio $\Longleftrightarrow X = \mathbb{P}^n [An - Wis01]$

X é Fano ovvero

$-K_X = detTX$ é ampio

Mori 82

X razionalmente connessa

Miyaoka 87

TX non genericamente seminegativo

X é unirigata

$X \sim$ fibrazione in varietá di Fano

le attrici del varietá e loro relazioni

TXé ampio $\Longleftrightarrow X = \mathbb{P}^n [Mori79]$

$\mathcal{E} \hookrightarrow TX$ ampio $\Longleftrightarrow X = \mathbb{P}^n [An - Wis01]$

Xé Fano ovvero

$-K_X = detTX$é ampio

Kollar-Miyaoka-Mori 92

Mori 82

X razionalmente connessa

Miyaoka 87

TX non genericamente seminegativo

X é unirigata

$X \sim$ fibrazione in varietá di Fano

le attrici del varietá e loro relazioni

TX é ampio $\Longleftrightarrow X = \mathbb{P}^n [Mori79]$

$\mathcal{E} \hookrightarrow TX$ ampio $\Longleftrightarrow X = \mathbb{P}^n [An - Wis01]$

X é Fano ovvero

$-K_X = detTX$ é ampio

Kollar-Miyaoka-Mori 92

Mori 82

X razionalmente connessa

Miyaoka 87

TX non genericamente seminegativo

X é unirigata

Minimal Model Program

$X \sim$ fibrazione in varietá di Fano

I Maestri

Curve razionali

Sulle varietá unirigate esistono famiglie di curve razionali, i.e. componenti irriducibili $V \subset \mathrm{Ratcurves}^n(X) := \mathrm{Hom}^n_{bir}(\mathbb{P}^1, X)/\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ (V_x la sottofamiglia delle curve passanti per x).

Curve razionali

Sulle varietá unirigate esistono famiglie di curve razionali, i.e. componenti irriducibili $V \subset \mathrm{Ratcurves}^n(X) := \mathrm{Hom}^n_{bir}(\mathbb{P}^1, X)/\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ (V_x la sottofamiglia delle curve passanti per x).

Teoria delle deformazioni+Rieman-Roch ci da una stima dal basso per la dimensione, che funziona bene per le varietá di Fano:

$$dimV \geq -K_X{\cdot}C + (n-3),$$

$$dimV_x \geq -K_X{\cdot}C - 2$$

Curve razionali speciali

Famiglie `minime o simili alle rette:`

- minima rispetto all' intersezione con $-K_X$

Curve razionali speciali

Famiglie `minime o simili alle rette:`

- minima rispetto all' intersezione con $-K_X$
- unsplit se V e' propria.

Curve razionali speciali

Famiglie `minime o simili alle rette:`

- minima rispetto all' intersezione con $-K_X$
- unsplit se V e' propria.
- locally unsplit se V_x e' propria.

Curve razionali speciali

Famiglie `minime o simili alle rette:`

- minima rispetto all' intersezione con $-K_X$
- unsplit se V e' propria.
- locally unsplit se V_x e' propria.
- genericamente unsplit se per due punti generici passano un numero finito di curve della famiglia.

Curve razionali speciali

Famiglie `minime o simili alle rette:`

- minima rispetto all' intersezione con $-K_X$
- unsplit se V e' propria.
- locally unsplit se V_x e' propria.
- genericamente unsplit se per due punti generici passano un numero finito di curve della famiglia.
- (minima $\Rightarrow$unsplit $\Rightarrow$ locally unsplit$\Rightarrow$ gen. unsplit).

Curve razionali speciali

Famiglie `minime o simili alle rette:`

- minima rispetto all' intersezione con $-K_X$
- unsplit se V e' propria.
- locally unsplit se V_x e' propria.
- genericamente unsplit se per due punti generici passano un numero finito di curve della famiglia.
- (minima $\Rightarrow$unsplit $\Rightarrow$ locally unsplit$\Rightarrow$ gen. unsplit).

Nota Se V é gen unsplit allora:

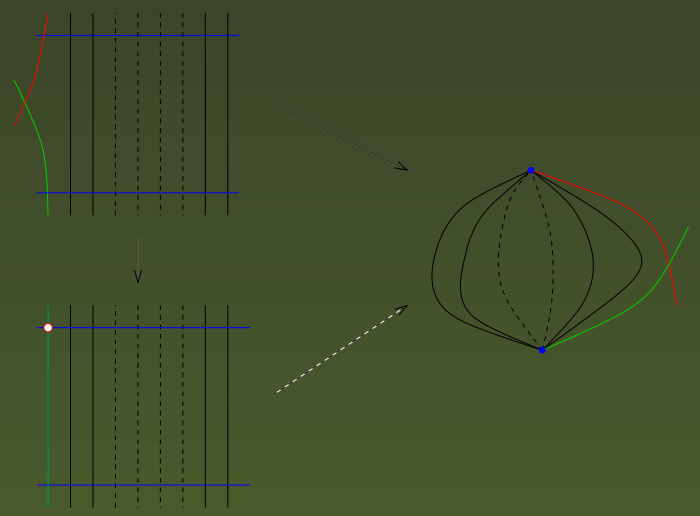
$$dimLocus(V_x) = dimV_x + 1 \geq -K_X{\cdot}C - 1.$$

Mori bend and break

Teorema-Mori bend and break Una varietá unirigata é coperta da una famiglia di curve razionali
(i) genericamente unsplit e
(ii)$deg_{-K_X} \leq (n+1)$.

Mori bend and break

Teorema-Mori bend and break Una varietá unirigata é coperta da una famiglia di curve razionali
(i) genericamente unsplit e
(ii)$deg_{-K_X} \leq (n+1)$.

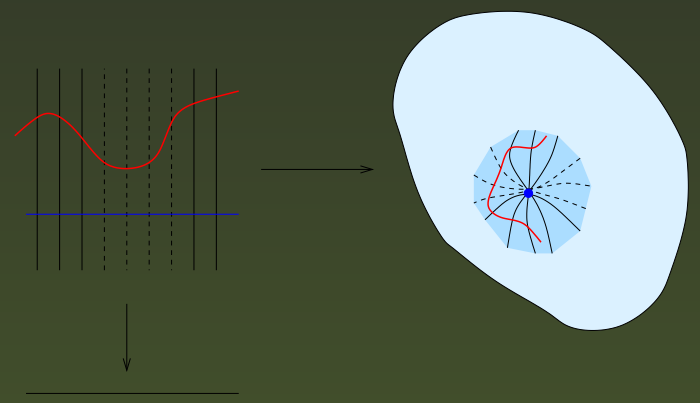


osservazione di Wisniewski

Proposizione Sia V una famiglia unsplit. Allora $\rho(Locus(V_x)) = 1$.

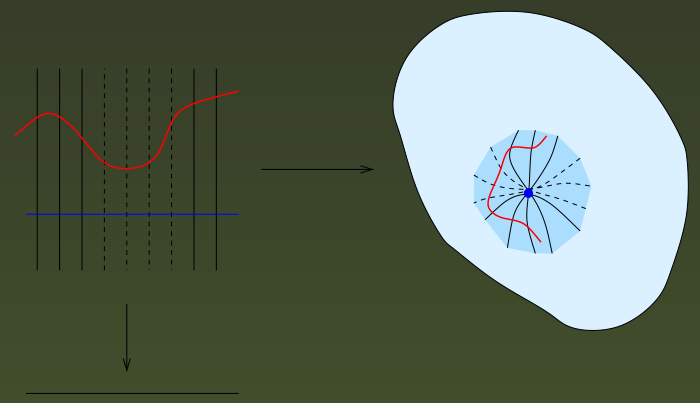
osservazione di Wisniewski

Proposizione Sia V una famiglia unsplit. Allora $\rho(Locus(V_x)) = 1$.



osservazione di Wisniewski

Proposizione Sia V una famiglia unsplit. Allora $\rho(Locus(V_x)) = 1$.



Proposizione Sia V una famiglia unsplit e $Y \subset X$ un chiuso tali che ogni curva in Y é indipendente da curve in V allora

$$dimLocus(V)_Y \geq dimY + deg_{-K_X}V - 1.$$

Fibrazioni in varietá razionalmente connesse.

Dati $x, y \in X$ definiamo :
$x \sim y$ sse $\exists$ catena di curve razionali per x e y.
$x \sim_{rcV} y$ sse $\exists$ catena di curve in V per x e y.

Fibrazioni in varietá razionalmente connesse.

Dati $x, y \in X$ definiamo :
$x \sim y$ sse $\exists$ catena di curve razionali per x e y.
$x \sim_{rcV} y$ sse $\exists$ catena di curve in V per x e y.

Teorema- Campana e Kollár-Miyaoka-Mori (1992)
Esiste un aperto $X^0 \subset X$ ed una mappa propria a fibre connesse $\varphi^0 : X^0 \to Z^0$ le cui fibre sono classi di equivalenza per la relazione $\sim$ (e quindi razionalmente connesse).
Se V é unsplit lo stesso vale per $\sim_{rcV}$ (fibre razionalmente connesse rispetto a V).

Una congettura di *Mukai*

Per una varietá di Fano X definiamo l' *indice* e lo *pseudoindice*:

Una congettura di *Mukai*

Per una varietá di Fano X definiamo l' *indice* e lo *pseudoindice*:

$$r_X = \max\{m \in \mathbb{N} \mid -K_X = mL \text{ per qualche divisore} L\},$$

$$i_X = \min\{m \in \mathbb{N} \mid -K_X \cdot C = m, C \subset X \text{ curva razionale }\}.$$

Una congettura di *Mukai*

Per una varietá di Fano X definiamo l' *indice* e lo *pseudoindice*:

$$r_X = \max\{m \in \mathbb{N} \mid -K_X = mL \text{ per qualche divisore} L\},$$

$$i_X = \min\{m \in \mathbb{N} \mid -K_X \cdot C = m, C \subset X \text{ curva razionale }\}.$$

Nota che $i_X = mr_X$. Sia anche $\rho_X = dim N_1(X)$

Una congettura di *Mukai*

Per una varietá di Fano X definiamo l' *indice* e lo *pseudoindice*:

$$r_X = \max\{m \in \mathbb{N} \mid -K_X = mL \text{ per qualche divisore} L\},$$

$$i_X = \min\{m \in \mathbb{N} \mid -K_X \cdot C = m, C \subset X \text{ curva razionale }\}.$$

Nota che $i_X = mr_X$. Sia anche $\rho_X = dim N_1(X)$

Congettura di Mukai (1988):

$$\rho_X(r_X - 1) \leq n.$$

piú tardi **generalizzata**

$$\rho_X(i_X - 1) \leq n \ \text{ con} = \text{sse} \quad X \simeq (\mathbb{P}^{i_X - 1})^{\rho_X}.$$

Risultati verso la congettura

-(1990) Wiśniewski:
se $i_X > \frac{n+2}{2}$ allora $\rho_X = 1$.

Risultati verso la congettura

-(1990) Wiśniewski:
se $i_X > \frac{n+2}{2}$ allora $\rho_X = 1$.

-(2002) Bonavero, Casagrande, Debarre e Druel:
C.g. vale se (a) $n = 4$,
(b) X é torica e $i_X \geq \frac{n+3}{3}$ o $n \leq 7$.

Risultati verso la congettura

-(1990) Wiśniewski:
se $i_X > \frac{n+2}{2}$ allora $\rho_X = 1$.

-(2002) Bonavero, Casagrande, Debarre e Druel:
C.g. vale se (a) $n = 4$,
(b) X é torica e $i_X \geq \frac{n+3}{3}$ o $n \leq 7$.

-(2003) Andreatta,Chierici,Occhetta:
Cg.vale se (a) $n = 5$,
(b) se $i_X \geq \frac{n+3}{3}$ ed esiste una famiglia di curve razionali V unsplit che copre X. Questo avviene se X ha una contrazione fibrata o non ha contrazioni piccole.

Prova naive della congettura

Lemma Sia V una famiglia unsplit e $Y \subset X$ un chiuso tali che ogni curva in Y é indipendente da curve in V allora

$$dimLocus(V)_Y \geq dimY + deg_{-K_X}V - 1.$$

Prova naive della congettura

Lemma Sia V una famiglia unsplit e $Y \subset X$ un chiuso tali che ogni curva in Y é indipendente da curve in V allora

$$dimLocus(V)_Y \geq dimY + deg_{-K_X}V - 1.$$

Claim. Se esistono $V_1, ..., V_\rho$ famiglie unsplit di c.r. le cui classi sono lineramente indipendenti in $N_1(X)$ e tale che $Locus(V_1, ..., V_\rho)_x \neq \emptyset$ allora la congettura vale.

Prova naive della congettura

Lemma Sia V una famiglia unsplit e $Y \subset X$ un chiuso tali che ogni curva in Y é indipendente da curve in V allora

$$dimLocus(V)_Y \geq dimY + deg_{-K_X}V - 1.$$

Claim. Se esistono $V_1, ..., V_\rho$ famiglie unsplit di c.r. le cui classi sono lineramente indipendenti in $N_1(X)$ e tale che $Locus(V_1, ..., V_\rho)_x \neq \emptyset$ allora la congettura vale.

Basta applicare induttivamente il lemma:

$$n \geq dimLocus(V_1, ..., V_\rho)_x \geq \Sigma_j(degV_j - 1) \geq \rho(i_X - 1).$$

Prova della congettura

Teorema (Wiśniewski 90)
Se $i_X > \frac{n+2}{2}$ e $\rho_X > 1$ allora esistono due famiglie V_1, V_2 come nel claim.

Infatti sia V_1 una famiglia che copre X con $deg_{-K_X} V_1 \leq (n+1)$ (Mori bend and break).
Allora V_1 é unsplit.

Poiché $\rho_X > 1$ esiste un'altra famiglia unsplit indipendente(teorema del cono).

Prova della congettura

Teorema (Wiśniewski 90)
Se $i_X > \frac{n+2}{2}$ e $\rho_X > 1$ allora esistono due famiglie V_1, V_2 come nel claim.

Infatti sia V_1 una famiglia che copre X con $deg_{-K_X} V_1 \leq (n+1)$ (Mori bend and break).
Allora V_1 é unsplit.

Poiché $\rho_X > 1$ esiste un'altra famiglia unsplit indipendente(teorema del cono).

Negli altri casi bisogna "mettere in fila" tre famiglie.....

Classificazione (con r_X o i_X alto).

X liscio

X singolare M. Reid e la sua scuola.

$r_X \geq n+1 \quad \mathbb{P}^n$ Kobayashi-Ochiai (70)

$i_X \geq n+1 \quad \mathbb{P}^n$ Cho-Miyaoka-Sh.Barr.(01)

Classificazione (con r_X o i_X alto).

X liscio

X singolare M. Reid e la sua scuola.

$r_X \geq n+1$	$\mathbb{P}^n$	Kobayashi-Ochiai (70)
$i_X \geq n+1$	$\mathbb{P}^n$	Cho-Miyaoka-Sh.Barr.(01)
$r_X = n$	$\mathbb{Q}^n$	Kobayashi-Ochiai (70)
$i_X = n, \rho = 1$	$\mathbb{Q}^n$	Miyaoka ?

Classificazione (con r_X o i_X alto).

X liscio

X singolare M. Reid e la sua scuola.

$r_X \geq n+1$	$\mathbb{P}^n$	Kobayashi-Ochiai (70)
$i_X \geq n+1$	$\mathbb{P}^n$	Cho-Miyaoka-Sh.Barr.(01)
$r_X = n$	$\mathbb{Q}^n$	Kobayashi-Ochiai (70)
$i_X = n, \rho = 1$	$\mathbb{Q}^n$	Miyaoka ?
$r_X = n-1$	del- Pezzo	Fujita (90)
$r_X = n-2$	Mukai	Fano, Isk., Mori, Mukai, ...

Come si ottiene la classificazione con r_X alto

La classificazione si ottiene in tre passi:

Come si ottiene la classificazione con r_X alto

La classificazione si ottiene in tre passi:

Primo:

A caccia di elefanti= element of the anticanonical system i.e. sezioni lisce di $D \in L$ dove $-K_X = r_X L$.

Teorema

Se $r_X \geq (n-1)$ esiste un elefante (Fuijta 90).

Come si ottiene la classificazione con r_X alto

La classificazione si ottiene in tre passi:

Primo:

A caccia di elefanti= element of the anticanonical system i.e. sezioni lisce di $D \in L$ dove $-K_X = r_X L$.

Teorema

Se $r_X \geq (n-1)$ esiste un elefante (Fuijta 90).

Se $r_X = (n-1)$ esiste un elefante (Mella 99)

Come si ottiene la classificazione con r_X alto

Secondo:

Si osserva che $-K_D = (r-1)L_D$,
D é una varietá di Fano $dimD = n-1$ e $r_D = r_X - 1$.

Come si ottiene la classificazione con r_X alto

Secondo:
Si osserva che $-K_D = (r-1)L_D$,
D é una varietá di Fano $dimD = n-1$ e $r_D = r_X - 1$.

Ci si conduce al caso $r = 1$; se $r_X = n-1$ si arriva alle superfici di del Pezzo, se $r_X = n-2$ si arriva alle tre-varietá di Fano.
Si producono esempi: la parte ”creativa”.

Come si ottiene la classificazione con r_X alto

Secondo:
Si osserva che $-K_D = (r-1)L_D$,
D é una varietá di Fano $dimD = n-1$ e $r_D = r_X - 1$.

Ci si conduce al caso $r = 1$; se $r_X = n-1$ si arriva alle superfici di del Pezzo, se $r_X = n-2$ si arriva alle tre-varietá di Fano.
Si producono esempi: la parte ”creativa”.

L’ultima tre-varietá di Fano trovata (Mori-Mukai 2003):
$Bl_C(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1), C$ curva di trigrado $(1,1,3)$

Aggiunzione

Terzo: Si ”risale”. La Teoria dell’aggiunzione in generalitá maggiore studia il seguente problema: dato $Z \subset X$, $Z \in |L|$ divisore ampio, determinare X.

Aggiunzione

Terzo: Si ”risale”. La Teoria dell’aggiunzione in generalitá maggiore studia il seguente problema: dato $Z \subset X$, $Z \in |L|$ divisore ampio, determinare X.

Ad esempio se Z di Fano e $-K_Z = r_Z H_Z$

$$\Longrightarrow -K_X = -K_Z + L = r_Z(H_Z) + L.$$

Aggiunzione

Terzo: Si ”risale”. La Teoria dell’aggiunzione in generalitá maggiore studia il seguente problema: dato $Z \subset X$, $Z \in |L|$ divisore ampio, determinare X.

Ad esempio se Z di Fano e $-K_Z = r_Z H_Z$

$$\Longrightarrow -K_X = -K_Z + L = r_Z(H_Z) + L.$$

Attenzione: H_Z puó non essere ampio su X (in particolare X puó non essere Fano).

Si confrontano i coni di Kleiman-Mori $\overline{NE(Z)}$ e $\overline{NE(X)}$.

Osservazione Questo problema non si presenta se si parte da X.

Dimmi che cono hai e ti diró chi sei

Teorema Andreatta-Novelli-Occhetta (2003).
Se $r_Z \geq dim Z/2 \geq 2$ allora X é Fano e $\overline{NE(Z)} = \overline{NE(X)}$, eccetto per $Z = \mathbb{P}^1 \times V$, con $V = \mathbb{P}^3$ o tre varietá di del Pezzo (inoltre $X \to \mathbb{P}^1$ con fibra $\mathbb{P}^4$ o quattro varietá di del Pezzo).

Dimmi che cono hai e ti diró chi sei

Teorema Andreatta-Novelli-Occhetta (2003).
Se $r_Z \geq dim Z/2 \geq 2$ allora X é Fano e $\overline{NE(Z)} = \overline{NE(X)}$, eccetto per $Z = \mathbb{P}^1 \times V$, con $V = \mathbb{P}^3$ o tre varietá di del Pezzo (inoltre $X \to \mathbb{P}^1$ con fibra $\mathbb{P}^4$ o quattro varietá di del Pezzo).

Corollario Classificazione di X con sezione ampia una varietá di Fano di indice $\geq (n-2) \geq 3$.

Dimmi che cono hai e ti diró chi sei

Teorema Andreatta-Novelli-Occhetta (2003).
Se $r_Z \geq dim Z/2 \geq 2$ allora X é Fano e $\overline{NE(Z)} = \overline{NE(X)}$, eccetto per $Z = \mathbb{P}^1 \times V$, con $V = \mathbb{P}^3$ o tre varietá di del Pezzo (inoltre $X \to \mathbb{P}^1$ con fibra $\mathbb{P}^4$ o quattro varietá di del Pezzo).

Corollario Classificazione di X con sezione ampia una varietá di Fano di indice $\geq (n-2) \geq 3$.

Note:

1) se L é molto ampio il teorema é di Beltrametti-Fania-Sommese

2) l'ultima tre varietá di Fano non risale

.e se lo pseudoindice é alto?

Teorema Chierici-Occhetta (2004).
Sia X una varietá di Fano con $i_X = dimX - 3$. Allora i coni $\overline{NE(X)}$ sono classificati per tutti i possibili X. In particolare $\overline{NE(X)}$ é generato da ρ_X raggi.

.e se lo pseudoindice é alto?

Teorema Chierici-Occhetta (2004).
Sia X una varietá di Fano con $i_X = dimX - 3$. Allora i coni $\overline{NE(X)}$ sono classificati per tutti i possibili X. In particolare $\overline{NE(X)}$ é generato da ρ_X raggi.

Inoltre X ha almeno una contrazione fibrata eccetto quando X é il blow-up di P^5 lungo una delle seguenti superfici: quadrica liscia, uno scroll cubico in P^4, una superficie di Veronese.