

Lezioni di Fisica per studenti di Informatica

Paolo Fornasini

10 aprile 2012

Indice

1	Introduzione	1
1.1	Perché la Fisica per Informatici ?	1
1.2	Il metodo scientifico	1
1.3	Grandezze fisiche e loro misurazione	2
1.4	Cifre significative e arrotondamenti	5
1.5	La struttura atomica della materia	7
2	La descrizione del movimento: cinematica	9
2.1	La legge oraria in una dimensione	9
2.2	Velocità in una dimensione	10
2.3	Accelerazione in una dimensione	12
2.4	Il moto in tre dimensioni	14
2.5	Moto circolare	17
2.6	Cinematica dei moti relativi	19
3	Dinamica	21
3.1	I principi della dinamica	21
3.2	Esempi di forze	24
3.3	Le forze fondamentali d'interazione	28
3.4	Quantità di moto	29
3.5	Lavoro e potenza	31
3.6	Energia	33
3.7	Moto armonico	35
3.8	Sistemi di punti materiali	38
4	Termodinamica	43
4.1	Sistemi costituiti da molte particelle	43
4.2	Energia interna	45
4.3	Pressione e temperatura	45
4.4	Il Primo Principio della Termodinamica	49
4.5	Effetti del calore	51
4.6	Equilibrio e processi termodinamici	54
4.7	Il Secondo Principio della Termodinamica	57
4.8	Entropia	59
4.9	Interpretazione microscopica dell'entropia	64
5	Elettromagnetismo	67
5.1	Atomi e carica elettrica	67
5.2	Elettrostatica: aspetti fondamentali	70
5.3	Il potenziale elettrico	74
5.4	Cariche in movimento: circuiti elettrici	77
5.5	Cariche in movimento: campo magnetico	80
5.6	L'induzione elettromagnetica	85

Capitolo 1

Introduzione

Questo Corso ha lo scopo di fornire un'introduzione ad alcuni concetti fondamentali della Fisica. Date le limitazioni di tempo, è stata operata una scelta piuttosto drastica degli argomenti da trattare, privilegiando quelli che hanno più attinenza con i principi di funzionamento dei dispositivi tipicamente usati per applicazioni informatiche. È comunque inevitabile trattare anche alcuni argomenti propedeutici di carattere generale (cinematica, principi della dinamica, principi della termodinamica).

Questo primo Capitolo è dedicato ad un'introduzione al metodo scientifico, alla misurazione delle grandezze fisiche, all'incertezza di misura e alle procedure di arrotondamento dei valori numerici.

1.1 Perché la Fisica per Informatici ?

Si possono individuare almeno tre motivazioni per cui lo studio della Fisica può essere importante per uno studente di Informatica.

1. *Motivazione culturale.* La Fisica rappresenta una disciplina particolarmente evoluta per lo studio dei fenomeni naturali. Lo sviluppo del metodo scientifico (§1.2), su cui si basa la ricerca in Fisica, ha rappresentato nel XVII secolo una rivoluzione culturale i cui effetti durano tuttora, e che ha reso possibile il continuo progresso tecnologico, di cui l'Informatica è un aspetto importante. La crisi della Fisica classica e lo sviluppo della Fisica moderna (meccanica quantistica e relatività einsteiniana) agli inizi del XX secolo, oltre a rendere possibile un ulteriore avanzamento nella comprensione dei fenomeni naturali e nello sviluppo di nuove tecnologie, hanno anche aperto la strada ad una riflessione critica sulle metodologie e sul significato della ricerca scientifica.
2. *Motivazione funzionale.* Lo sviluppo impressionante dell'Informatica è stato reso possibile ed è tuttora alimentato, almeno per quel che riguarda l'hardware, dai risultati della ricerca in Fisica e dal suo continuo progresso. Si pensi alla Fisica dei semiconduttori, sia cristallini che amorfi, alle guide d'onda, alla progressiva miniaturizzazione dei componenti, alle prospettive del calcolo quantistico. Anche alcuni aspetti software hanno beneficiato delle conoscenze accumulate in Fisica; ad esempio, il concetto di entropia come misura della perdita di informazione è ricollegabile al concetto di entropia della termodinamica statistica.
3. *Motivazione applicativa.* La ricerca in Fisica offre molte possibilità di applicazione delle tecniche informatiche (controllo di strumentazione complessa, acquisizione ed elaborazione di dati sperimentali, simulazione di sistemi fisici, etc.)

1.2 Il metodo scientifico

Il metodo scientifico, che sta alla base del successo della Fisica nell'interpretazione dei fenomeni naturali e nello sviluppo di nuove tecnologie, può essere articolato nei seguenti passi.

- *Osservazione.* Lo scienziato osserva con attenzione la natura e i suoi fenomeni, alla ricerca di similitudini e regolarità. Si arriva così, ad esempio, alle classificazioni della botanica e della zoologia, oppure alle descrizioni dei moti delle stelle e dei pianeti.
- *Esperimento.* È questo l'aspetto innovativo della rivoluzione galileiana del XVII secolo. Lo scienziato non si limita all'osservazione passiva dei fenomeni naturali, bensì li riproduce in forma controllata nel suo laboratorio, modificando sistematicamente i diversi fattori che ne influenzano lo svolgimento. È così possibile isolare singoli aspetti semplici di fenomeni complessi, e studiarli separatamente. Con questo metodo, ad esempio, Galileo riuscì a ridurre progressivamente l'effetto dell'attrito, fino ad identificare la relazione di proporzionalità tra forza ed accelerazione, che era sfuggita ai precedenti osservatori. Si osservi anche che molti fenomeni sfuggono comunque alla percezione sensoriale diretta, e possono venire rivelati solo mediante strumenti costruiti *ad hoc* (si pensi ai fenomeni elettromagnetici).
- *Modellizzazione.* L'osservazione dei fenomeni naturali e la loro eventuale riproduzione in forma controllata in laboratorio diventano strumenti particolarmente potenti se è possibile esprimere le proprietà degli oggetti e dei fenomeni, che chiamiamo *grandezze fisiche*, mediante valori numerici (vedi §1.3), e se è possibile evidenziare delle relazioni tra i valori di diverse grandezze fisiche. Ad esempio, l'esperimento mostra che c'è una proporzionalità diretta tra la forza totale agente su un corpo e la sua accelerazione, mentre c'è una relazione di proporzionalità inversa tra volume e pressione di un gas rarefatto mantenuto a temperatura costante. Queste relazioni empiriche portano alla formulazione di modelli matematici dei fenomeni in esame, o addirittura di teorie interpretative.
- *Verifica sperimentale del modello.* Un modello o una teoria, per essere considerati validi, devono avere carattere predittivo. Devono cioè essere in grado di predire, una volta stabilite le condizioni iniziali, l'andamento dei fenomeni (ad esempio il comportamento in volo di un aeroplano, o la risposta di un dispositivo a semiconduttore ad un dato segnale di ingresso). Modelli e teorie sono quindi continuamente soggetti a verifiche sperimentali. Il fallimento anche di una sola verifica implica la falsità del modello o della teoria, che dovrà perciò venire riformulato.

1.3 Grandezze fisiche e loro misurazione

La possibilità di costruire modelli o teorie matematiche per la descrizione dei fenomeni fisici si basa sulla possibilità di definire alcune grandezze fisiche (lunghezza, massa, forza, intensità di corrente elettrica, temperatura, etc) e di attribuire loro, mediante esperimento, opportuni valori numerici. L'operazione che consente di attribuire un valore numerico ad una grandezza fisica si chiama *misurazione*.

Consideriamo una grandezza fisica \mathcal{G} (per concretezza, pensiamo ad esempio alla lunghezza di un'asta). La misurazione diretta della grandezza \mathcal{G} si può ricondurre idealmente ad una sequenza logica di azioni:

- a) costruzione o scelta di un campione \mathcal{U} di unità di misura;
- b) composizione di campioni: $\sum \mathcal{U}_i$;
- c) verifica di identità tra \mathcal{G} e una somma $n\mathcal{U}$ di campioni;
- d) computo degli n campioni.

Secondo questo schema logico, la misura $X(\mathcal{G})$ della grandezza \mathcal{G} è il rapporto tra la grandezza \mathcal{G} ed l'unità di misura \mathcal{U} :

$$X(\mathcal{G}) = \mathcal{G}/\mathcal{U}. \quad (1.1)$$

Il risultato di una misurazione si indica pertanto così: $\mathcal{G} = X \cdot \mathcal{U}$; X è il numero che esprime la misura, \mathcal{U} è l'unità di misura; ad esempio, per una lunghezza: $d = 5$ metri; per un intervallo di tempo: $\Delta t = 7$ secondi, per una massa: $m = 2$ chilogrammi.



Figura 1.1: Incertezza nella misurazione di una lunghezza, dovuta alla risoluzione finita dello strumento di misura.

È facile rendersi conto che la grandezza \mathcal{G} solo in qualche raro caso corrisponderà ad un multiplo intero $n\mathcal{U}$ dell'unità di misura. Pertanto, la misura $X = \mathcal{G}/\mathcal{U}$ non è in genere un numero intero n . Ammettendo la divisibilità dell'unità di misura \mathcal{U} in un numero comunque grande di sottomultipli, si potrebbe pensare che la misura $X = \mathcal{G}/\mathcal{U}$ possa comunque essere sempre un numero razionale m/n . È però ben noto che esistono grandezze incommensurabili (ad esempio il lato e la diagonale di un quadrato) il cui rapporto è un numero irrazionale. Pertanto la misura di una grandezza fisica è, almeno in linea di principio, un *numero reale* r :

$$X(\mathcal{G}) = \mathcal{G}/\mathcal{U} = r. \quad (1.2)$$

L'eq. (1.2) stabilisce la corrispondenza tra grandezze fisiche e numeri reali che sta alla base dell'uso dei formalismi della matematica del continuo nella descrizione teorica di gran parte dei fenomeni fisici macroscopici.

1.3.1 Incertezza di misura

Nella pratica sperimentale della misurazione, si ha sempre a che fare con strumenti di misura in cui l'unità \mathcal{U} non può essere resa arbitrariamente piccola, per cui la verifica di identità tra la grandezza \mathcal{G} e una somma di campioni può essere fatta solo in modo approssimato. Con esattezza potremo solo decidere che

$$n\mathcal{U} < \mathcal{G} < (n+1)\mathcal{U}, \quad (1.3)$$

cioè stabilire un intervallo di valori di larghezza \mathcal{U} entro il quale si colloca la misura della grandezza \mathcal{G} (Fig.1.1). In altri termini, il risultato di una misurazione diretta non è un numero, bensì un intervallo finito di possibili valori. La larghezza dell'intervallo rappresenta un'incertezza o *indeterminazione* della misura. L'incertezza dovuta alla risoluzione finita dello strumento di misura può essere assimilata all'incertezza dovuta al numero finito di bit impiegati dagli elaboratori elettronici per rappresentare i numeri. La risoluzione dello strumento corrisponde al valore del singolo bit dell'elaboratore.

In linea di principio si potrebbe pensare di ricondurre l'incertezza al di sotto di un valore comunque prefissato riducendo opportunamente l'unità di misura \mathcal{U} . Nella pratica, la riduzione dell'unità \mathcal{U} è generalmente limitata da difficoltà di natura tecnica. Inoltre, altre cause di incertezza, legate sia a fluttuazioni di natura casuale sia ad errori di tipo sistematico nelle procedure di misurazione, possono contribuire in modo determinante all'incertezza di misura.

L'esperienza ha mostrato che l'incertezza nelle procedure di misurazione non è mai completamente eliminabile. L'incertezza è dunque parte integrante della misura e va ogni volta valutata quantitativamente con attenzione. La misura di una qualsiasi grandezza fisica deve sempre riportare l'informazione sull'entità della sua incertezza. La sua espressione sarà tipicamente del tipo

$$\mathcal{G} = (X_0 \pm \delta X)\mathcal{U}, \quad (1.4)$$

dove X_0 è il valore centrale della misura e δX rappresenta la semi-larghezza dell'intervallo di incertezza.

Esempio: Si misura la lunghezza di un foglio di quaderno con un righello millimetrato. Il risultato è $\ell = 209 \pm 0.5$ mm.

Esempio: Il valore della massa dell'elettrone, una costante fondamentale della Fisica, è attualmente quotato nelle tabelle come $m_e = (9. 109 381 88 \pm 0. 000 000 72) \times 10^{-31}$ kg. Per brevità si utilizza spesso la scrittura convenzionale equivalente $m_e = 9. 109 381 88(72) \times 10^{-31}$ kg.

Tabella 1.1: Grandezze fondamentali del Sistema Internazionale, con unità di misura e relativi simboli

Grandezza	Unità	Simbolo
intervallo di tempo	secondo	s
lunghezza	metro	m
massa	chilogrammo	kg
quantità di materia	mole	mol
temperatura	kelvin	K
intensità di corrente elettrica	ampere	A
intensità luminosa	candela	cd

Saper valutare correttamente l'incertezza di misura è essenziale sia in campo scientifico, per fissare i limiti di validità delle teorie con cui si descrivono i fenomeni naturali, sia in campo tecnologico, per asserire il grado di affidabilità di prodotti e procedure.

1.3.2 Sistemi di unità di misura

Nella descrizione del mondo fisico vengono introdotte molte grandezze, collegate tra loro da relazioni analitiche; ad esempio, spazio s , tempo t e velocità media v sono legati dalla relazione $v = s/t$. In linea di principio, è del tutto lecito scegliere per ogni grandezza un'unità di misura arbitraria. Ciò porta però in genere all'introduzione di scomodi fattori di proporzionalità, oltre alla necessità di definire e mantenere un grande numero di campioni di unità di misura. Risulta pertanto conveniente scegliere in modo arbitrario l'unità di misura solo per un numero molto piccolo di grandezze (dette *grandezze fondamentali*). Per le altre grandezze (dette *grandezze derivate*) l'unità di misura verrà definita in modo univoco mediante relazioni analitiche.

Costruire un *sistema di unità di misura* significa:

- scegliere una determinata ripartizione delle grandezze fisiche tra fondamentali e derivate;
- definire le unità di misura e gli eventuali campioni delle grandezze fondamentali.

Le unità di misura delle grandezze fondamentali sono realizzate mediante *campioni*. Esistono campioni di unità di misura anche per molte grandezze derivate. Le proprietà principali che caratterizzano un campione sono: precisione, invariabilità (nel tempo), accessibilità, riproducibilità. Si distinguono due tipi fondamentali di campioni: i *campioni naturali*, la cui definizione fa riferimento a fenomeni naturali, ed i *campioni artificiali*, costruiti appositamente. I campioni naturali assicurano la riproducibilità e l'invariabilità, anche se talora a scapito dell'accessibilità.

1.3.3 Il Sistema Internazionale

Molte diverse unità di misura, variabili da luogo a luogo e talora anche nel tempo, sono state utilizzate per la misura di lunghezze, superfici, volumi e masse. Un tentativo di costruire un sistema di unità di misura per la meccanica fu fatto in Francia nel 1795. Solo a partire dal 1895 (*Convenzione del metro*) è iniziata la stipula di convenzioni internazionali per l'unificazione dei vari sistemi in uso. Negli ultimi anni si è realizzata la convergenza verso un ben definito sistema, il *Sistema Internazionale* (S.I.), introdotto nel 1960 dalla XI Conferenza Generale dei Pesi e Misure e perfezionato dalle Conferenze successive. Oggetto di direttive della Comunità Europea fin dal 1971, il S.I. è stato legalmente adottato in Italia nel 1982.

Grandezze fondamentali Il Sistema Internazionale (S.I.) è basato su 7 grandezze fondamentali, elencate in tabella 1.1 insieme con le rispettive unità di misura e simboli.

Grandezze derivate Le unità di misura delle grandezze derivate si ottengono mediante semplici operazioni aritmetiche a partire dalle unità di misura delle grandezze fondamentali. Alcune unità sono dotate di nome proprio.

Esempio 1. L'*accelerazione* è una grandezza derivata. Per definizione l'accelerazione è il rapporto tra una velocità ed un intervallo di tempo. La sua unità di misura, priva di nome proprio, è 1 m s^{-2} , cioè il rapporto tra l'unità di spazio e il quadrato dell'unità di tempo.

Esempio 2. L'*angolo piano* e l'*angolo solido* sono grandezze derivate. Le loro unità di misura sono dotate di nome proprio, rispettivamente *radiante* e *steradiano*. Il *radiante* (rad) è l'angolo piano che sottende, su una circonferenza centrata nel suo vertice, un arco di lunghezza uguale al raggio. Lo *steradiano* (sr) è l'angolo solido che sottende, su una sfera centrata nel suo vertice, una calotta sferica di area uguale al quadrato del raggio.

Esempio 3. La *forza* F è una grandezza derivata. Attraverso la legge fondamentale della dinamica, $F = ma$, l'unità di misura della forza è ricondotta alle unità di misura della massa e dell'accelerazione. L'unità di misura della forza è dotata di nome proprio, il *newton* (N), ed è definita come $1 \text{ N} = 1 \text{ Kg m s}^{-2}$.

Il S.I. codifica in modo dettagliato anche le *norme di scrittura* dei nomi e dei simboli delle grandezze fisiche, nonché l'uso dei prefissi moltiplicativi secondo multipli di 1000.

1.4 Cifre significative e arrotondamenti

Il valore delle grandezze fisiche è espresso mediante numeri composti di singole cifre. Quando si eseguono operazioni sui valori delle grandezze fisiche, è necessario fare attenzione al reale significato delle cifre che risultano dai calcoli. Nel seguito, cercheremo di chiarire cosa si intende per *cifre significative* di un valore numerico, e spiegheremo come si eseguono gli eventuali arrotondamenti dei valori numerici in seguito all'eliminazione delle cifre meno significative o prive del tutto di significato.

1.4.1 Valori esatti e valori approssimati

Nella pratica scientifica e tecnologica si ha talora a che fare con *valori numerici esatti*. Alcuni esempi:

- Il numero dei lati di un pentagono è un valore intero esatto.
- Il valore della funzione seno, in corrispondenza dell'argomento $\pi/6$, può essere espresso con esattezza: $\sin(\pi/6) = 0.5$.
- La velocità della luce c , per convenzione internazionale, ha il valore esatto 299792458 m/s .

Più spesso si ha a che fare con *valori numerici approssimati*. Alcuni esempi:

- Il risultato della misurazione di una grandezza fisica è sempre un valore approssimato; l'entità dell'approssimazione è misurata dall'incertezza della misura.
- Il valore della funzione coseno, in corrispondenza dell'argomento $\pi/6$, può essere espresso solo in modo approssimato, a seconda del grado di precisione desiderato; ad esempio $\cos(\pi/6) \simeq 0.866$, oppure $\cos(\pi/6) \simeq 0.8660254$, etc.
- Molto spesso il valore numerico della velocità della luce viene approssimato mediante una procedura di arrotondamento (descritta più avanti): ad esempio $c \simeq 3 \times 10^8 \text{ m/s}$.

1.4.2 Cifre significative

Le *cifre significative* (in inglese *significant digits*) di un valore numerico approssimato ne individuano la precisione. Il numero di cifre significative in un valore numerico approssimato si ottiene contando le cifre da sinistra verso destra, a partire dalla prima cifra diversa da zero. Gli eventuali zeri a sinistra delle cifre significative hanno valore puramente posizionale. Ad esempio:

il numero 25.04 ha 4 cifre significative: 2 5 0 4
 il numero 0.0037 ha 2 cifre significative: 3 7
 il numero 0.50 ha 2 cifre significative: 5 0

Il conteggio delle cifre significative non è ovvio quando il valore numerico è intero e termina con uno o più zeri, ad esempio: 350 oppure 47000. In tali casi è necessario sapere se uno o più zeri hanno valore puramente posizionale anziché significativo. La *notazione scientifica* consente di evitare equivoci. Ad esempio, consideriamo il valore 2700. In notazione scientifica il valore andrà scritto diversamente a seconda del numero di zeri considerati significativi:

$2700 = 2.7 \times 10^3$ (2 cifre significative)
 2.70×10^3 (3 cifre significative)
 2.700×10^3 (4 cifre significative)

Delle cifre significative di un valore numerico:

- la prima cifra è detta *cifra più significativa* (in inglese *most significant digit*);
- l'ultima cifra è detta *cifra meno significativa* (in inglese *least significant digit*).

Talora l'incertezza di una misura, anziché venire esplicitamente indicata nella forma $\pm\delta X$, è implicitamente sottintesa nel numero di cifre significative utilizzate. Ad esempio:

$X = 2.47 \text{ m}$ sta per $X = (2.47 \pm 0.005) \text{ m}$
 $X = 2.470 \text{ m}$ sta per $X = (2.470 \pm 0.0005) \text{ m}$

Questo modo di rappresentare i valori di misura andrebbe comunque evitato, in quanto in molti casi non consente una indicazione sufficientemente precisa dell'incertezza e può dare origine ad interpretazioni non univoche.

1.4.3 Regole per l'arrotondamento

Talora è necessario ridurre il numero di cifre di un valore numerico. In tal caso la cifra meno significativa rimasta va arrotondata secondo le regole seguenti.

- a) Se la cifra più significativa da eliminare è 0, 1, 2, 3, 4, allora la cifra meno significativa rimasta resta inalterata (*arrotondamento per difetto*).

Esempio: $12.34 \simeq 12.3$

- b) Se la cifra più significativa da eliminare è 6, 7, 8, 9 oppure 5 seguito da almeno una cifra diversa da zero, allora la cifra meno significativa rimasta viene maggiorata di un'unità (*arrotondamento per eccesso*).

Esempi: $12.355 \simeq 12.4$
 $12.365 \simeq 12.4$

- c) Se la cifra più significativa da eliminare è 5 seguito solo da zeri, allora la cifra meno significativa rimasta resta inalterata quando è pari, viene maggiorata di un'unità quando è dispari (*regola del numero pari*).

Esempi: $12.35 \simeq 12.4$
 $12.45 \simeq 12.4$

Le regole suesposte, e in particolare la regola del numero pari, sono costruite in modo che il valor medio di un insieme di valori numerici venga modificato meno possibile dall'operazione di arrotondamento.

1.4.4 Arrotondamento nei risultati dei calcoli

Quando si eseguono dei calcoli su *valori numerici approssimati*, le cifre del risultato non sono in genere tutte significative; il risultato andrà perciò arrotondato in modo da mantenere solo le cifre significative. Non esistono regole rigorose e sempre valide per decidere quante cifre sono significative in un risultato. Si possono comunque dare alcune indicazioni di massima.

Nel caso di **addizioni e sottrazioni** di numeri approssimati: le cifre di una somma o una differenza non sono significative alla destra della posizione che corrisponde alla cifra meno significativa in uno qualsiasi dei termini da sommare o sottrarre.

Esempio: Supponiamo di voler addizionare i seguenti tre numeri approssimati: 2.456, 0.5, 3.35; il secondo numero non ha cifre significative oltre la prima posizione decimale, pertanto anche il risultato andrà arrotondato alla prima posizione dopo la virgola:

$$\begin{array}{r}
 2.456 \quad + \\
 0.5 \quad + \\
 3.35 \quad = \\
 \hline
 6.306 \quad \rightarrow \quad 6.3
 \end{array}$$

Esempio: Si vuole calcolare il valor medio dei tre numeri approssimati: 19.90, 19.92, 19.95. Usando una calcolatrice tascabile si ottiene il valor medio 19.923333, che va arrotondato a 19.92.

Nel caso di **moltiplicazioni e divisioni** di numeri approssimati: se il numero che ha meno cifre significative ne ha n , è ragionevole arrotondare il risultato all' n -ma cifra significativa, in taluni casi anche all' $(n+1)$ -ma. Le **radici quadrate** di numeri approssimati vanno generalmente arrotondate allo stesso numero di cifre significative del radicando.

Esempio: Si calcola il prodotto dei due numeri approssimati 6.83 e 72 utilizzando una calcolatrice tascabile. Il risultato 491.76 va arrotondato a due cifre significative: 4.9×10^2 .

Esempio: Si calcola il quoziente del numero approssimato 83.642 per il numero approssimato 72 utilizzando una calcolatrice tascabile. Il risultato 1.1616944 può essere arrotondato a 2 cifre significative, 1.2, ma in questo caso è preferibile tenere anche la terza cifra: 1.16.

Esempio: Si calcola la radice quadrata di 30.74 con una calcolatrice tascabile. Il risultato $\sqrt{30.74} = 5.5443665$ va arrotondato a 5.544.

Esempio: Si vuole calcolare la tangente trigonometrica di un angolo di 27° come rapporto tra i valori del seno e del coseno approssimati a 2 cifre significative: $\sin(27^\circ) \simeq 0.45$ e $\cos(27^\circ) \simeq 0.89$. Eseguendo il rapporto con una calcolatrice tascabile si ottiene il valore numerico 0.505618, che va approssimato a 0.51 o a 0.506; calcolando direttamente il valore della tangente con la stessa calcolatrice si otterrebbe $\tan(27^\circ) \simeq 0.5095398$.

1.4.5 Cifre significative e incertezza delle misure

Nel caso delle misure di grandezze fisiche, come abbiamo già osservato, l'incertezza determina il numero di cifre significative. Ricordiamo due regole pratiche dettate dal buon senso.

- a) L'incertezza δX va espressa con non più di due cifre significative; in molti casi può essere sufficiente una sola cifra significativa.
- b) Nell'espressione di una misura nella forma $X_0 \pm \delta X$, l'ultima cifra significativa del valore centrale X_0 deve essere dello stesso ordine di grandezza dell'ultima cifra significativa dell'incertezza.

1.5 La struttura atomica della materia

Torniamo a considerare la modellizzazione della realtà fisica, di cui abbiamo parlato al §1.2. Particolarmente rilevante è il modello atomico della struttura della materia. Il modello atomico fu

introdotto su base puramente speculativa dal filosofo greco Democrito nel IV secolo a.C., adottato da Epicuro e cantato dal poeta latino Lucrezio. Nel XIX secolo il modello atomico viene adottato dai chimici come utile schema interpretativo di importanti leggi sperimentali (ad es., le leggi delle proporzioni costanti e delle proporzioni multiple), ma è solo agli inizi del XX secolo che viene accettato definitivamente anche nel campo della Fisica.

Oggi è universalmente accettato il fatto che la materia è fatta di atomi. Gli atomi hanno dimensioni di qualche decimo di nanometro (1 nanometro = 1 miliardesimo di metro, $1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$), e sono composti da un nucleo pesante con carica elettrica positiva e da una nube di elettroni con carica elettrica negativa. Il numero di elettroni, variabile in natura da 1 a 92, determina le proprietà chimiche dell'atomo (l'atomo di idrogeno ha un elettrone, l'atomo di uranio ne ha 92).

Parte dell'attuale attività di ricerca in Fisica è rivolta a chiarire la struttura interna del nucleo atomico e dei suoi costituenti, le cosiddette particelle elementari.

Un'altra parte, di cui ci occuperemo più in dettaglio verso la fine del corso, è rivolta a studiare le diverse modalità di aggregazione degli atomi, dalle molecole ai solidi, e a collegare le proprietà funzionali macroscopiche delle sostanze alla struttura microscopica a scala atomica.

La descrizione dei fenomeni a livello macroscopico viene fatta nell'ambito della cosiddetta Fisica classica, che si basa su principi ben codificati entro la fine del XIX secolo, ed è convenzionalmente divisa in varie branche: meccanica, termodinamica, elettromagnetismo, ottica. La descrizione dei fenomeni a livello atomico e subatomico non può invece essere fatta in termini puramente classici, e richiede un insieme di differenti principi ed un formalismo peculiare, che vanno sotto il nome di meccanica quantistica. In questo corso ci occuperemo principalmente di fenomeni descrivibili nell'ambito della fisica classica, e accenneremo anche a fenomeni che richiedono una descrizione quantistica.

1.5.1 Modelli discreti e continui

La struttura atomica della materia è intrinsecamente discreta, granulare. Ciononostante, quando si considerano corpi macroscopici, la struttura granulare diviene talmente fine da poter essere considerata continua. È quindi frequente l'uso di modelli matematici continui per la materia considerata a livello macroscopico.

Incontreremo altri esempi di contrapposizione tra modelli discreti e modelli continui. Un esempio tipico è la descrizione del movimento dei corpi (velocità media e velocità all'istante). I modelli continui vengono descritti matematicamente nell'ambito della teoria analitica delle funzioni continue di variabile reale. L'avvento del calcolo numerico mediante elaboratori elettronici ha molto semplificato la descrizione dei modelli discreti, e li ha resi competitivi in molti casi con i modelli continui.

Capitolo 2

La descrizione del movimento: cinematica

Lo studio del movimento dei corpi in relazione alle cause che lo producono (le forze) è il primo passo indispensabile per affrontare qualsiasi altro argomento di Fisica: dalle orbite dei pianeti in astronomia al moto degli elettroni nei conduttori e nei semiconduttori.

La *cinematica* introduce le tecniche necessarie per descrivere il movimento, mediante le due grandezze velocità ed accelerazione. In questo capitolo studieremo la cinematica in una dimensione ed accenneremo ad alcuni aspetti rilevanti della cinematica in tre dimensioni.

Nel capitolo seguente, dedicato alla *dinamica*, stabiliremo il collegamento tra il movimento e le cause che lo producono (le forze).

2.1 La legge oraria in una dimensione

Consideriamo il moto di un punto P su una traiettoria rettilinea. Una volta scelti sulla retta un punto origine O , un'orientazione e un'unità di misura, è possibile individuare la posizione istantanea del punto P per mezzo della sua coordinata x (Fig. 2.1). Si noti che la coordinata x può avere valori sia positivi che negativi.

La legge oraria è la funzione $x(t)$ che descrive la variazione della posizione x in funzione del tempo t . La distanza x dall'origine si misura in metri, il tempo t in secondi. Alcune semplici leggi orarie,

$$x(t) = A, \quad x(t) = Bt, \quad x(t) = Ct^2, \quad x(t) = D \sin(\omega t), \quad (2.1)$$

sono rappresentate graficamente in Fig.2.2 (grafici nella parte superiore). Si faccia attenzione che le costanti A, B, C, D, ω nella (2.1) devono essere espresse con le corrette unità di misura, ad esempio: A (m), B (m/s), C (m/s²), D (m), ω (t⁻¹).

Naturalmente nessun corpo reale è assimilabile ad un punto geometrico. In molti casi è tuttavia lecito approssimare un corpo reale con un punto: nel caso ad esempio che le dimensioni del corpo siano piccole rispetto alle dimensioni della traiettoria (un'automobile in moto lungo un tratto rettilineo di autostrada). Nel caso di corpi grandi rispetto alle dimensioni della traiettoria, si distingue il moto del loro centro di massa, che è un punto geometrico, e il moto rispetto al centro

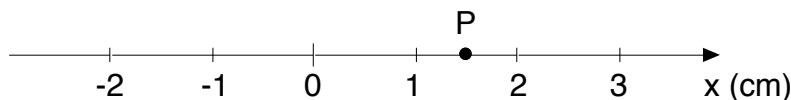


Figura 2.1: La posizione di un punto P su una retta orientata è individuata dalla sua distanza dall'origine, misurata in un'opportuna unità di misura (in questo caso centimetri).

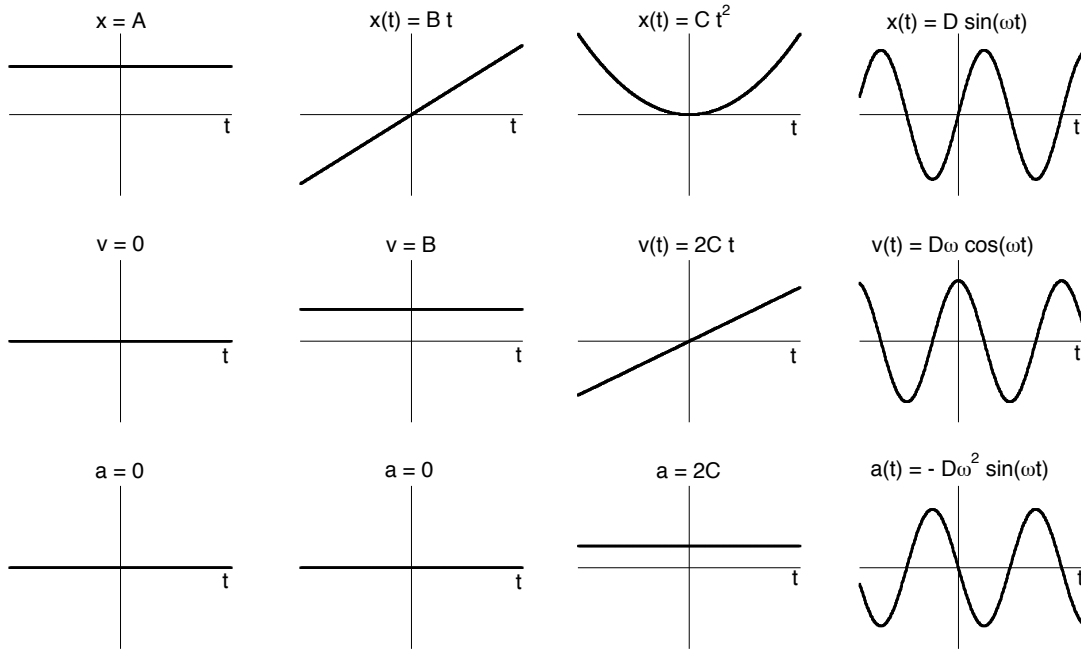


Figura 2.2: Parte superiore: grafici delle leggi orarie (2.1). Parte centrale: grafici delle corrispondenti velocità (2.4). Parte inferiore: grafici delle corrispondenti accelerazioni (2.11). Sull'asse delle ascisse è rappresentato il tempo t .

di massa; la cinematica del punto è perciò adatta anche a descrivere il moto del centro di massa di un corpo esteso.

Conoscere la legge oraria $x(t)$ significa avere un'informazione completa sul movimento di un corpo. È tuttavia molto utile introdurre due grandezze, la velocità e l'accelerazione, che caratterizzano in modo più diretto le proprietà del movimento.

2.2 Velocità in una dimensione

2.2.1 Velocità media e velocità istantanea

Consideriamo due diversi istanti di tempo, t_1 e t_2 . Supponiamo che durante il movimento lungo la traiettoria rettilinea il punto si trovi nella posizione di coordinata x_1 all'istante t_1 , e nella posizione di coordinata x_2 all'istante t_2 (Fig. 2.3, parte superiore). Chiamiamo $\Delta x = x_2 - x_1$ lo spostamento tra le due posizioni sulla traiettoria, e $\Delta t = t_2 - t_1$ l'intervallo temporale impiegato dal punto nel passare da x_1 a x_2 . Si noti che lo spostamento Δx può avere valore negativo, nullo o positivo a seconda dei casi.

Si chiama *velocità media* relativa all'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ (Fig. 2.3, parte inferiore) il rapporto

$$v_m = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (2.2)$$

La velocità media dà una descrizione grossolana del movimento. Suddividendo l'intervallo temporale Δt in intervalli via via più piccoli, e misurando la velocità media relativa ad ognuno degli intervalli, si può ottenere una descrizione via via più raffinata del movimento.

La descrizione in assoluto più raffinata viene fatta utilizzando lo strumento matematico della derivata, cioè il limite per $\Delta t \rightarrow 0$ del rapporto tra intervallo spaziale ed intervallo temporale.

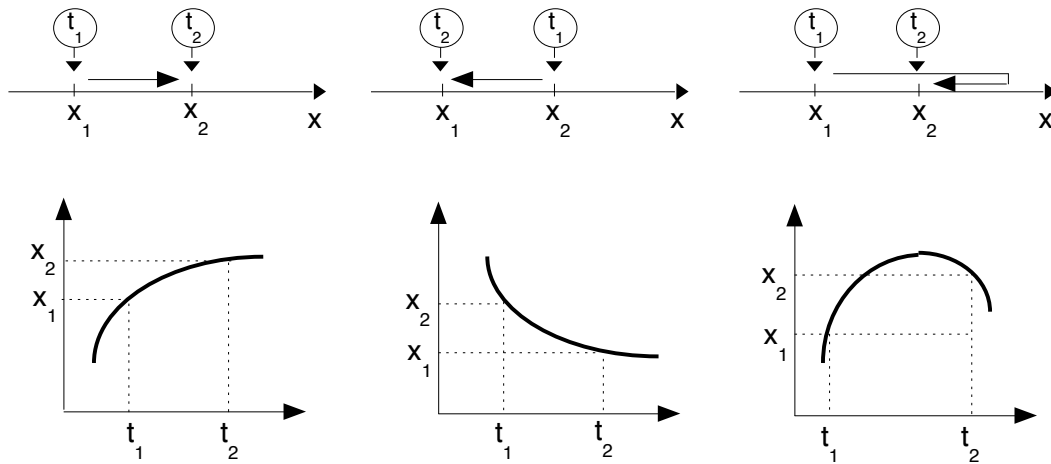


Figura 2.3: Calcolo della velocità media. In alto: tre possibili situazioni lungo la traiettoria rettilinea. In basso, grafici di tre possibili leggi orarie $x(t)$.

Per ogni istante t , si può pertanto considerare una *velocità istantanea*, definita come la derivata prima della legge oraria:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}. \quad (2.3)$$

L'idea di velocità all'istante è abbastanza familiare: il tachimetro di un'automobile misura infatti proprio la velocità istantanea.

La velocità (media o istantanea) si misura in metri al secondo (m s^{-1}).

La velocità istantanea è una funzione del tempo, come la legge oraria. Nota la legge oraria $x(t)$, la funzione $v(t)$ è determinata in modo univoco mediante l'operazione di derivazione.

Le velocità istantanee relative alle leggi orarie (2.1) sono, rispettivamente,

$$v(t) = 0, \quad v(t) = B, \quad v(t) = 2Ct, \quad v(t) = D\omega \cos(\omega t), \quad (2.4)$$

e sono rappresentate nei grafici della parte centrale di Fig. 2.2.

2.2.2 Nota la velocità, ricavare la legge oraria

Supponiamo che sia nota la velocità in funzione del tempo, ossia la funzione $v(t)$. È possibile risalire alla legge oraria $x(t)$? Si tratta evidentemente del problema inverso al precedente, cioè ricavare $v(t)$ dalla conoscenza di $x(t)$.

Il problema può venire espresso mediante l'equazione

$$\frac{d}{dt} [x(t)] = v(t), \quad (2.5)$$

dove la funzione $v(t)$ è nota, mentre la funzione $x(t)$ è incognita. Un'equazione di questo genere, in cui è nota la derivata prima di una funzione [in questo caso $v(t)$] e si vuole ricavare la funzione stessa [in questo caso $x(t)$] si chiama equazione differenziale del primo ordine. Per risolvere l'equazione differenziale (2.5), ricaviamo prima l'espressione dello spostamento infinitesimo dx e quindi, per integrazione, lo spostamento finito Δx :

$$dx(t) = v(t) dt, \quad \Delta x = \int_{t_0}^t v(t') dt'.$$

La conoscenza della funzione $v(t)$ consente di calcolare solo lo spostamento Δx (Fig. 2.4 a). La legge oraria $x(t)$ è univocamente determinata solo se è nota anche la *condizione iniziale* $x_0 = x(t_0)$,

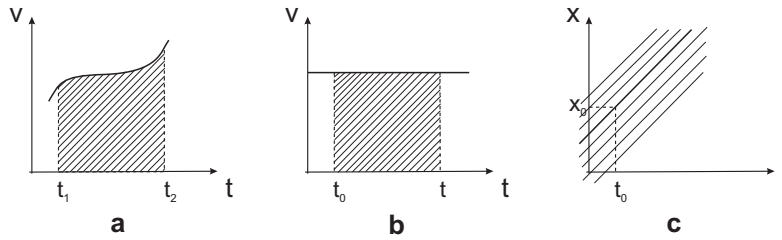


Figura 2.4: Calcolo della legge oraria, nota la velocità in funzione del tempo

cioè la posizione all'istante t_0 .

$$x(t) = x_0 + \Delta x = x_0 + \int_{t_0}^t v(t') dt' \quad (2.6)$$

(La soluzione di un'equazione differenziale del primo ordine contiene sempre una costante di integrazione). Se x_0 non è noto, l'equazione differenziale ha infinite soluzioni, corrispondenti agli infiniti possibili valori di x_0 .

2.2.3 Moto uniforme

Se la velocità non varia nel tempo, $v(t) = v_1 = \text{costante}$, il moto è detto uniforme (Fig. 2.4 b). Se il valore v_1 è noto, l'integrale definito si calcola facilmente, e la legge oraria (2.6) diviene

$$x(t) = x_0 + v_1 (t - t_0), \quad (2.7)$$

sempre dipendente dal valore della posizione iniziale x_0 . Se non viene specificato il valore di x_0 (posizione all'istante t_0), non è possibile scegliere tra le infinite leggi orarie per le quali $v(t) = v_1$ (Fig. 2.4 c).

2.3 Accelerazione in una dimensione

2.3.1 Accelerazione media e accelerazione all'istante

Se la velocità *non* è costante, è utile studiare più in dettaglio la sua variazione nel tempo. Consideriamo ancora due diversi istanti di tempo, t_1 e t_2 . Supponiamo che durante il movimento lungo la traiettoria rettilinea il punto abbia velocità v_1 all'istante t_1 , e velocità v_2 all'istante t_2 . La differenza $\Delta v = v_2 - v_1$ è la variazione di velocità subita dal punto nell'intervallo di tempo tra gli istanti t_1 e t_2 .

Si chiama *accelerazione media* relativa all'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ il rapporto

$$a_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \quad (2.8)$$

L'accelerazione si misura in metri al secondo per secondo (m s^{-2}). Il concetto di accelerazione media è abbastanza familiare: un'automobile che, partendo da ferma, raggiunge i 90 km h^{-1} (cioè 25 m s^{-1}) in 10 s ha un'accelerazione media di 2.5 m s^{-2} .

L'accelerazione media dà una descrizione grossolana del movimento. Suddividendo l'intervallo temporale Δt in intervalli via via più piccoli, e misurando l'accelerazione media relativa ad ognuno degli intervalli, si può ottenere una descrizione via via più raffinata della variazione di velocità.

Anche in questo caso, la descrizione in assoluto più raffinata viene fatta utilizzando lo strumento matematico della derivata: per ogni istante t si può considerare un'*accelerazione istantanea*, definita come la derivata prima della velocità, ovvero la derivata seconda della legge oraria:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}. \quad (2.9)$$

Calcoliamo l'accelerazione istantanea negli esempi (2.1):

$$a(t) = 0, \quad a(t) = 0, \quad a(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t). \quad (2.10)$$

Le accelerazioni istantanee relative alle leggi orarie (2.1) sono, rispettivamente,

$$a(t) = 0, \quad a(t) = 0, \quad a(t) = 2C, \quad a(t) = -D\omega^2 \sin(\omega t), \quad (2.11)$$

e sono rappresentate nei grafici della parte inferiore di Fig. 2.2.

2.3.2 Nota l'accelerazione, ricavare la velocità

Anche nel caso dell'accelerazione è importante saper risolvere il problema inverso, cioè risalire dall'accelerazione alla velocità.

Se è nota l'accelerazione in funzione del tempo, $a(t)$, la velocità $v(t)$ si può ricavare risolvendo l'equazione differenziale del primo ordine

$$\frac{d}{dt} [v(t)] = a(t), \quad (2.12)$$

dove l'incognita è la funzione $v(t)$. La soluzione

$$v(t) = v_0 + \Delta v = v_0 + \int_{t_0}^t a(t') dt' \quad (2.13)$$

è univocamente determinata solo se è nota la *condizione iniziale* $v_0 = v(t_0)$, cioè la velocità all'istante t_0 .

2.3.3 Moto uniformemente vario

Se l'accelerazione non varia nel tempo, $a(t) = a_1 = \text{costante}$ (Fig. 2.5 a), il moto è detto uniformemente vario. Dalla (2.13) si ottiene la velocità in funzione del tempo:

$$v(t) = v_0 + a_1 (t - t_0). \quad (2.14)$$

La velocità dipende linearmente dal tempo (Fig. 2.5 b). In questo caso è perciò agevole ricavare la legge oraria utilizzando la (2.6):

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t v(t') dt' \\ &= x_0 + v_0 \int_{t_0}^t dt' + a_1 \int_{t_0}^t (t' - t_0) dt' \\ &= x_0 + v_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} a_1 (t - t_0)^2. \end{aligned} \quad (2.15)$$

(Il calcolo dell'ultimo integrale è reso più facile dalla sostituzione $\tau = t - t_0$).

Il grafico di $x(t)$ è parabolico (Fig. 2.5 c). Se $a_1 > 0$, la parabola ha concavità rivolta verso l'alto; se $a_1 < 0$, la parabola ha concavità rivolta verso il basso.

Un caso molto importante di accelerazione costante è rappresentato dall'accelerazione di gravità, convenzionalmente indicata con la lettera g , diretta verso il basso e di valore approssimato $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$.

Si noti che la determinazione della legge oraria (2.15) richiede la conoscenza di due condizioni iniziali, x_0 e v_0 , cioè posizione e velocità all'istante t_0 . Nota $a(t)$, la legge oraria si ottiene infatti risolvendo l'equazione differenziale del secondo ordine

$$\frac{d^2}{dt^2} [x(t)] = a(t), \quad (2.16)$$

dove l'incognita è la funzione $x(t)$. In generale, la soluzione di un'equazione differenziale di ordine n contiene n costanti d'integrazione.

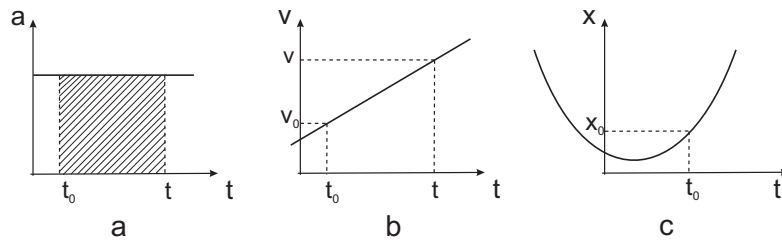


Figura 2.5: Calcolo della legge oraria per un moto uniformemente vario: (a) accelerazione, (b) velocità, (c) posizione in funzione del tempo

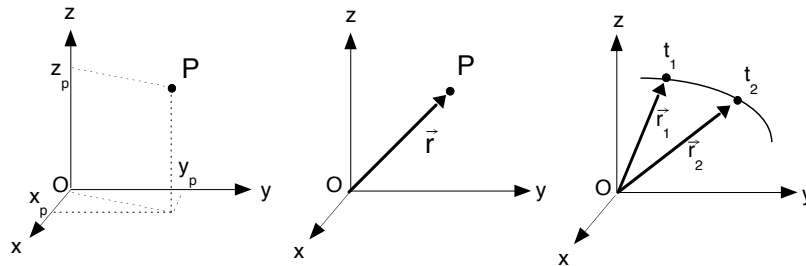


Figura 2.6: La posizione di un punto P nello spazio può essere individuata dalle coordinate x_p, y_p, z_p (a sinistra), oppure dal vettore posizione \vec{r} (al centro). Al trascorrere del tempo, il punto P si muove lungo la traiettoria (a destra).

2.4 Il moto in tre dimensioni

Il movimento di un punto lungo una retta, cui ci siamo finora limitati, rappresenta un caso molto particolare. Nella pratica, è molto frequente incontrare movimenti che si svolgono su traiettorie non rettilinee. Si pensi, ad esempio, al movimento della Terra intorno al Sole, oppure di un'automobile lungo una strada di montagna, oppure di un elettrone tra i magneti curvanti di un tubo a raggi catodici (CRT).

Anche nel caso del moto in tre dimensioni possiamo introdurre una legge oraria, che descrive la posizione del punto in funzione del tempo, nonché le due grandezze velocità ed accelerazione. È però necessario usare un formalismo matematico più complesso rispetto al caso unidimensionale.

2.4.1 Descrizione vettoriale e legge oraria

Per individuare la posizione di un punto P che si muove lungo una traiettoria nello spazio tridimensionale ci serviremo di un sistema di coordinate cartesiane ortogonali $Oxyz$.

In termini analitici, la posizione del punto P è univocamente determinata dai valori delle tre coordinate x_p, y_p, z_p (Fig. 2.6, a sinistra).

In termini geometrici, la posizione del punto P è individuata dal vettore \vec{r} , cioè dal segmento orientato che ha come origine il punto O (origine del sistema di coordinate) e come estremo il punto P (Fig. 2.6, al centro).

Le due descrizioni, analitica e geometrica, sono equivalenti. Le tre coordinate (x, y, z) vengono chiamate le *componenti* del vettore \vec{r} lungo gli assi cartesiani: $r_x = x_p, r_y = y_p, r_z = z_p$. Il vettore \vec{r} è quindi individuato da

- una direzione, quella che passa per i punti O e P ,
- un verso, quello da O a P ,
- un modulo, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (nel caso di coordinate ortogonali).

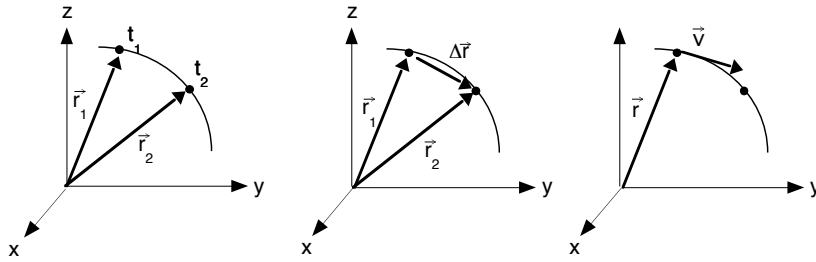


Figura 2.7: Vettori posizione del punto P agli istanti t_1 e t_2 (a sinistra). Vettore spostamento $\Delta\vec{r}$ (al centro). Vettore velocità \vec{v} (a destra).

La **legge oraria**, che descrive come il punto si muove nel tempo percorrendo la traiettoria tridimensionale (Fig. 2.6, a destra), può essere espressa dalle tre funzioni scalari

$$r_x(t) = x_p(t), \quad r_y(t) = y_p(t), \quad r_z(t) = z_p(t). \quad (2.17)$$

Sinteticamente, in notazione vettoriale, la legge oraria si scrive

$$\vec{r}(t); \quad (2.18)$$

il vettore \vec{r} mantiene fissa l'origine nel punto O e, con l'estremo libero, descrive la traiettoria del punto P .

2.4.2 Il vettore velocità

Vogliamo ora generalizzare al caso tridimensionale il concetto di velocità, partendo dalla trattazione fatta per il moto rettilineo.

Consideriamo due diversi istanti di tempo, t_1 e t_2 . Supponiamo che durante il movimento lungo la traiettoria il punto si trovi nella posizione P_1 , di coordinate (x_1, y_1, z_1) , all'istante t_1 , e nella posizione P_2 , di coordinate (x_2, y_2, z_2) all'istante t_2 .

Per ognuna delle tre coordinate possiamo definire una *velocità scalare media*

$$v_{x,m} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad v_{y,m} = \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta y}{\Delta t}, \quad v_{z,m} = \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta z}{\Delta t}. \quad (2.19)$$

Al limite $\Delta t \rightarrow 0$ si ottengono le tre *velocità scalari istantanee*

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt}, \quad v_y(t) = \frac{dy}{dt}, \quad v_z(t) = \frac{dz}{dt}. \quad (2.20)$$

Una descrizione più sintetica si ottiene utilizzando il formalismo vettoriale. Le tre grandezze scalari v_x, v_y, v_z possono essere considerate le componenti di un *vettore velocità* \vec{v} .

Per comprendere il significato del vettore \vec{v} , consideriamo i due vettori posizione \vec{r}_1 e \vec{r}_2 agli istanti t_1 e t_2 , e indichiamo con $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ il vettore spostamento, che collega le posizioni del punto P agli istanti t_1 e t_2 (Fig. 2.7, a sinistra e al centro). È facile vedere che le componenti del vettore $\Delta\vec{r}$ sono $\Delta x, \Delta y, \Delta z$.

Al limite per $\Delta t \rightarrow 0$, il vettore spostamento diviene infinitesimo, $d\vec{r}$, di componenti dx, dy, dz . Il vettore \vec{v} può quindi essere pensato come il limite del rapporto tra il vettore spostamento $\Delta\vec{r}$ e l'intervallo di tempo Δt , cioè come la derivata di \vec{r} rispetto a t :

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (2.21)$$

È facile rendersi conto che la direzione del vettore velocità $\vec{v}(t)$ è sempre *tangente alla traiettoria* (Fig. 2.7, a destra).

Il modulo del vettore velocità $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ si misura in m s^{-1} .

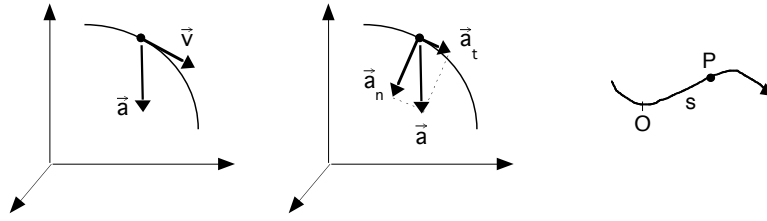


Figura 2.8: A sinistra: il vettore accelerazione è diretto verso la concavità della traiettoria. Al centro: componenti tangenziale e normale dell'accelerazione. A destra: coordinata curvilinea

2.4.3 Il vettore accelerazione

Anche nel caso del moto tridimensionale è importante saper descrivere come varia nel tempo la velocità, generalizzando il concetto di accelerazione.

Consideriamo ancora inizialmente un approccio puramente scalare. Supponiamo che all'istante t_1 il punto abbia velocità \vec{v}_1 , di componenti (v_{1x}, v_{1y}, v_{1z}) , e all'istante t_2 abbia velocità \vec{v}_2 , di componenti (v_{2x}, v_{2y}, v_{2z}) .

Per ognuna delle tre coordinate possiamo definire un' *accelerazione scalare media*

$$a_{x,m} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}, \quad a_{y,m} = \frac{\Delta v_y}{\Delta t}, \quad a_{z,m} = \frac{\Delta v_z}{\Delta t}. \quad (2.22)$$

Al limite $\Delta t \rightarrow 0$ si ottengono le tre *accelerazioni scalari istantanee*

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y(t) = \frac{dv_y}{dt}, \quad a_z(t) = \frac{dv_z}{dt}. \quad (2.23)$$

Anche nel caso dell'accelerazione è conveniente utilizzare il formalismo vettoriale. Le tre grandezze scalari a_x, a_y, a_z possono essere considerate le componenti di un *vettore accelerazione* \vec{a} , corrispondente alla derivata prima del vettore velocità \vec{v} rispetto al tempo,

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad (2.24)$$

ovvero alla derivata seconda del raggio vettore \vec{r} rispetto al tempo:

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}. \quad (2.25)$$

La descrizione vettoriale è particolarmente utile per comprendere il significato fisico dell'accelerazione nel moto tridimensionale. Si noti infatti che una variazione di velocità può comportare non solo variazione del modulo (valore scalare), ma anche variazione della direzione del vettore \vec{v} .

Ad esempio, consideriamo un'automobile che si muove a 50 km/h costanti lungo una curva. Anche se il modulo della velocità non varia nel tempo, la direzione varia, perché il vettore velocità è tangente alla traiettoria. Per descrivere la variazione in direzione del vettore velocità \vec{v} , deve esistere un vettore accelerazione \vec{a} , con la direzione rivolta verso l'interno della curva.

Il vettore accelerazione descrive sia la variazione in modulo che la variazione in direzione del vettore velocità. Il vettore accelerazione $\vec{a}(t)$ è sempre diretto verso la concavità della traiettoria (Fig. 2.8 a sinistra). È utile decomporre il vettore accelerazione $\vec{a}(t)$ nella direzione tangente alla traiettoria e nel piano normale alla traiettoria in un punto dato (Fig. 2.8 al centro). Si può dimostrare che

- la componente tangente descrive la variazione del modulo della velocità: $a_T = dv/dt$,
- la componente normale (o centripeta) descrive la variazione in direzione della velocità, ed è proporzionale al quadrato della velocità: $a_N \propto v^2$

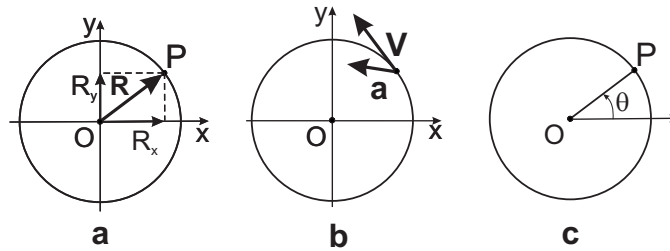


Figura 2.9: Moto circolare: descrizione in coordinate cartesiane (a, b) e in coordinate polari (c)

2.4.4 Coordinata curvilinea

Spesso, quando la forma geometrica della traiettoria è nota a priori, il moto del punto P viene descritto per mezzo della legge oraria $s(t)$: s è la distanza, misurata lungo la traiettoria, del punto P da un'origine prefissata O (Fig. 2.8 a destra). Un esempio tipico è la distanza misurata lungo una strada. La legge $s(t)$ dà solo informazioni di natura scalare.

Quando $\Delta s \rightarrow 0$, allora $\Delta s \rightarrow \Delta r$, l'arco cioè si confonde con la corda. È facile dimostrare che

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad \frac{d^2s}{dt^2} = a_T; \quad (2.26)$$

la derivata prima della coordinata curvilinea dà il modulo della velocità, la derivata seconda dà la componente tangente dell'accelerazione.

2.5 Moto circolare

Un caso particolarmente importante di movimento non rettilineo è rappresentato dal moto di un punto P che si muove su una traiettoria circolare di raggio R .

2.5.1 Moto circolare in coordinate cartesiane

Poiché la traiettoria circolare è contenuta in un piano, il problema è bidimensionale, e la posizione del punto P può essere descritta mediante due coordinate. Possiamo ad esempio utilizzare un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy , con l'origine O coincidente con il centro della circonferenza. La posizione del punto P è individuata dal raggio vettore \vec{R} , di modulo costante e componenti R_x, R_y . Il problema si riconduce quindi a quello generale della descrizione del moto in due o tre dimensioni (Fig. 2.9 a).

Il vettore velocità \vec{v} è tangente alla circonferenza. Il vettore accelerazione \vec{a} è diretto verso l'interno della circonferenza (Fig. 2.9 b).

2.5.2 Moto circolare in coordinate polari

L'uso delle due coordinate x, y può essere ridondante, per descrivere il moto circolare. Infatti, una volta prefissato un punto origine Q sulla circonferenza, la posizione del punto P è univocamente determinata da una sola coordinata, cioè dalla coordinata curvilinea s , ovvero, alternativamente, dall'angolo θ formato dal raggio vettore \vec{R} con l'asse OQ (Fig. 2.9 c).

Le due coordinate s e θ sono legate dalla relazione $s = R\theta$, purché l'angolo θ venga espresso in radianti (un angolo giro = 360 gradi = 2π rad). L'uso dei radianti per la misura degli angoli semplifica molte relazioni matematiche, ad esempio quelle che coinvolgono operazioni di derivazione e di integrazione.

La *legge oraria*, che descrive la posizione del punto in funzione del tempo, viene espressa dalla funzione $s(t)$ oppure dalla funzione $\theta(t)$.

Derivando rispetto al tempo la legge oraria $s(t)$ si ottiene il modulo della velocità:

$$v = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} = R\omega, \quad (2.27)$$

dove $\omega = d\theta/dt$ è la *velocità angolare*, che si misura in radianti al secondo (rad/s). Se ω è costante, il moto si dice *circolare uniforme*.

Derivando ulteriormente il modulo della velocità, si ottiene l'accelerazione tangenziale

$$a_T = \frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\alpha, \quad (2.28)$$

dove $\alpha = d\omega/dt = d^2\theta/dt^2$ è l'*accelerazione angolare*, che si misura in radianti al secondo quadrato (rad/s²). Nel moto circolare uniforme (ω costante) l'accelerazione angolare è nulla.

2.5.3 Moto circolare uniforme

Studiamo più in dettaglio il caso del moto circolare uniforme ($\omega = \text{costante}$) nel sistema di coordinate Oxy , tenendo però in considerazione anche la coordinata angolare θ e il fatto che $\theta = \omega t$. Le componenti del vettore posizione, della velocità e dell'accelerazione sono rispettivamente

$$\begin{cases} x = R \cos(\omega t) \\ y = R \sin(\omega t) \end{cases}, \quad \begin{cases} v_x = -R\omega \sin(\omega t) \\ v_y = R\omega \cos(\omega t) \end{cases}, \quad \begin{cases} a_x = -R\omega^2 \cos(\omega t) \\ a_y = -R\omega^2 \sin(\omega t) \end{cases}. \quad (2.29)$$

È facile verificare che il modulo della velocità è $v = (v_x^2 + v_y^2)^{1/2} = R\omega$ e l'accelerazione tangenziale è nulla, $a_T = dv/dt = 0$. Le componenti dell'accelerazione sono proporzionali alle componenti del vettore posizione, $\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$, il che conferma che l'accelerazione è puramente normale, $a_N = R\omega^2 = v^2/R$.

Si può mostrare che l'espressione dell'accelerazione normale $a_N = v^2/R$ vale per qualsiasi moto circolare, anche non uniforme.

2.5.4 Relazione tra \vec{v}, \vec{a} e ω, α

Riassumiamo il collegamento tra le due descrizioni del moto circolare, in coordinate cartesiane e in coordinate polari:

arco di circonferenza	$s = R\theta$
velocità (modulo)	$v = R\omega$
accelerazione tangenziale	$a_T = dv/dt = R\alpha$
accelerazione normale	$a_N = v^2/R = \omega^2 R$

È importante notare che

- A parità di velocità angolare ω , la velocità lineare v è proporzionale alla distanza R dal centro di rotazione.
- A parità di accelerazione angolare α , l'accelerazione tangenziale a_T è proporzionale alla distanza R dal centro di rotazione.
- L'accelerazione normale a_N è proporzionale al quadrato della velocità angolare ω .
- Nel caso del moto circolare uniforme (ω costante), l'accelerazione angolare e l'accelerazione tangenziale sono entrambe nulle ($\alpha = 0, a_T = 0$), mentre l'accelerazione normale è diversa da zero, in quanto descrive la variazione in direzione della velocità vettoriale \vec{v} .

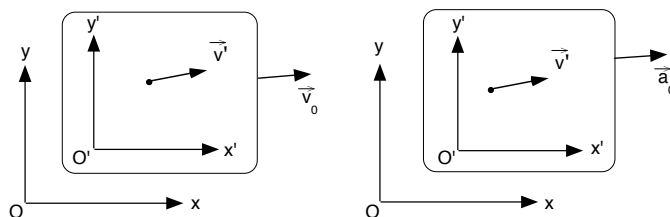


Figura 2.10: Moto relativo: traslazionale uniforme (a sinistra) e traslazionale uniformemente vario (a destra).

2.6 Cinematica dei moti relativi

Moto e quiete sono concetti relativi, hanno cioè senso solo se si specifica *rispetto a che cosa* avviene il movimento. Per fare un esempio, si consideri un treno che si muove a velocità costante. Un passeggero seduto sul treno è *in quiete* rispetto al treno ma *in movimento* rispetto ai binari.

Come abbiamo già visto, la descrizione del moto richiede che si specifichi in partenza un *sistema di riferimento* rispetto al quale il moto è valutato e descritto (rappresentato geometricamente, ad esempio, da un sistema di assi cartesiani).

La descrizione del movimento è diversa se fatta rispetto a sistemi di riferimento diversi. Ad esempio, il moto di una persona che cammina nel corridoio di una carrozza ferroviaria in corsa è descritto in modo diverso a seconda che il sistema di riferimento sia fisso con il treno o fisso con i binari: la velocità della persona è diversa rispetto ai due sistemi di riferimento.

La connessione tra le descrizioni del moto fatte rispetto a due sistemi di riferimento diversi, in movimento relativo l'uno rispetto all'altro, è importante sia dal punto di vista pratico che di principio. Non affronteremo qui il problema dal punto di vista generale, ma ci limiteremo ad enunciare, senza dimostrazione, alcuni risultati particolarmente significativi.

2.6.1 Moto relativo traslazionale uniforme

Consideriamo due diversi sistemi di riferimento, che per semplicità chiameremo O ed O' (ad esempio un binario ed un treno), e supponiamo che il sistema O' si muova rispetto al sistema O con velocità costante \vec{v}_0 (Fig. 2.10 a sinistra).

Studiamo ora il moto di un punto P rispetto ai due sistemi di riferimento. Si può dimostrare che, se la velocità del punto P rispetto al sistema O' è \vec{v}' , allora la velocità rispetto al sistema O è

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0. \quad (2.30)$$

In altri termini, le velocità si sommano.

In realtà questa relazione semplice e intuitiva, che è facilmente verificabile nella pratica comune, è valida solo se le velocità in gioco sono piccole rispetto alla velocità di propagazione della luce nel vuoto (pari a circa $3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$). L'esperienza ha mostrato che la velocità della luce è una velocità limite, che non può essere superata in nessun sistema di riferimento. Quando sono in gioco velocità prossime a quella della luce, l'eq. (2.30) non è più valida (questo problema costituisce uno dei punti centrali della *teoria della relatività ristretta* di Einstein).

Se ora passiamo a considerare le accelerazioni misurate rispetto ai due sistemi di riferimento in moto relativo uniforme, sempre nell'ipotesi che le velocità in gioco siano piccole rispetto alla velocità della luce, si dimostra che esse sono uguali:

$$\vec{a} = \vec{a}' \quad (2.31)$$

2.6.2 Moto relativo traslazionale uniformemente vario

Consideriamo ora un riferimento O' che si muove con accelerazione costante \vec{a}_0 rispetto al sistema O (Fig. 2.10 a destra). Ad esempio: un treno appena uscito dalla stazione, che progressivamente aumenta la sua velocità rispetto ai binari.

In questo caso, la velocità di un sistema rispetto all'altro non è costante, ma varia a causa dell'accelerazione relativa \vec{a}_0 . Pertanto la velocità \vec{v} del punto P rispetto al sistema O è legata alla velocità \vec{v}' rispetto al sistema O' dalla relazione

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{a}_0 t \quad (2.32)$$

Per quanto riguarda le accelerazioni, vale la relazione

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0 \quad (2.33)$$

Le accelerazioni misurate rispetto ai due sistemi di riferimento sono diverse. Poiché, come vedremo nel Capitolo 3, dedicato alla dinamica, le accelerazioni sono proporzionali alle forze agenti sui corpi, la scelta del sistema di riferimento può non essere indifferente dal punto di vista dinamico.

2.6.3 Conclusioni

I risultati dei due paragrafi precedenti possono essere sintetizzati e generalizzati come segue:

- Se i due sistemi di riferimento O e O' si muovono di moto relativo *traslazionale uniforme*, le accelerazioni di un corpo qualsiasi misurate nei due riferimenti sono uguali.
- Se i due sistemi di riferimento O e O' si muovono di moto relativo *accelerato*, le accelerazioni di un corpo qualsiasi misurate nei due riferimenti sono differenti. (Si noti che due riferimenti in moto relativo rotazionale uniforme sono accelerati uno rispetto all'altro.)

Queste conclusioni sulla relatività del moto assumono una notevole rilevanza nello studio della Dinamica, come vedremo nel prossimo Capitolo 3.

Capitolo 3

Dinamica

Scopo primo della dinamica è lo studio del movimento in relazione alle cause che lo possono influenzare, cioè le *forze*.

3.1 I principi della dinamica

La dinamica si fonda su tre principi, enunciati da Newton nel XVII secolo:

1. Primo principio, o Principio d'inerzia
2. Secondo principio (detto anche Legge fondamentale)
3. Terzo principio

I tre principi sono affermazioni basate sull'esperienza, quindi non “dimostrate”. La loro validità si basa sulla verifica sperimentale delle loro numerose conseguenze.

Una volta enunciati i principi della dinamica, approfondiremo alcune delle loro conseguenze, con particolare riferimento alla dinamica del *punto materiale*, cioè di un oggetto la cui estensione non è rilevante rispetto al comportamento dinamico che si vuole studiare. Faremo qualche accenno anche ai sistemi composti da molti punti materiali ed ai corpi rigidi estesi.

Nella dinamica, oltre a studiare il problema del movimento dei corpi, si introducono alcune grandezze, come lavoro, potenza, energia, che rivestono un'importanza fondamentale in tutta la Fisica ed hanno anche notevole rilevanza da un punto di vista tecnologico.

3.1.1 Il concetto di forza

Per influire sul moto di un corpo è necessario applicare una forza. Assumeremo come primitivo il concetto intuitivo di forza, basato sugli esempi della vita quotidiana: lo sforzo fisico necessario per muovere un oggetto, la forza di gravità che attrae verso il basso tutti i corpi, etc.

Possiamo fin d'ora enunciare alcune proprietà delle forze, che verranno chiarite progressivamente nel seguito.

- Le forze hanno carattere direzionale, e richiedono pertanto una descrizione di tipo vettoriale (direzione, verso, intensità) (Fig. 3.1, a sinistra).
- Principio di sovrapposizione: l'effetto di più forze che agiscono su uno stesso punto materiale equivale all'effetto di un'unica forza, detta forza risultante, somma vettoriale delle forze agenti: $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$. L'addizione di vettori si esegue con la nota regola del parallelogramma (Fig. 3.1, al centro).
- Esistono modi per misurare operativamente l'intensità di una forza, e raffrontarla all'intensità di altre forze, ad esempio misurando la deformazione impartita ad una molla (dinamometro) (Fig. 3.1, a destra).

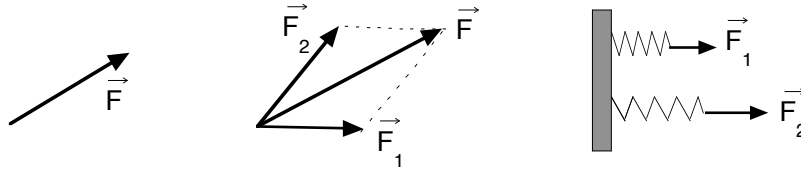


Figura 3.1: La forza è una grandezza vettoriale (a sinistra). Le forze si sommano con la regola del parallelogramma (al centro). L'intensità di una forza è proporzionale alla deformazione di una molla (a destra).

È bene rendersi conto fin d'ora che la forza che agisce su un corpo rappresenta sempre in realtà l'interazione tra almeno due corpi. Ad esempio, la forza di gravità che attrae verso il basso un generico corpo C rappresenta l'interazione (detta *gravitazionale*) tra il corpo C e il pianeta Terra.

3.1.2 Il primo principio (principio d'inerzia)

Il Primo Principio afferma: *Un corpo non soggetto a forze permane in uno stato di quiete oppure di moto rettilineo uniforme.*

La tendenza dei corpi a mantenere inalterato lo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme si chiama *inerzia*.

L'assenza di forze agenti su un corpo significa l'assenza di interazioni con i corpi vicini. Si tratta evidentemente di una condizione astratta, che nella pratica può venire realizzata solo in modo approssimato.

3.1.3 Sistemi di riferimento inerziali

Lo stato di quiete o di moto di un corpo è un concetto relativo, che dipende dal sistema di riferimento utilizzato (si riveda il § 2.6). Un corpo che si muova di moto rettilineo uniforme rispetto ad un riferimento $Oxyz$ è invece accelerato rispetto ad un altro riferimento $O'x'y'z'$, se $O'x'y'z'$ è accelerato rispetto a $Oxyz$. Ciò significa che il principio d'inerzia non vale rispetto a qualsiasi sistema di riferimento.

Un sistema di riferimento nel quale è verificato il principio d'inerzia si dice *riferimento inerziale*. Una volta individuato un riferimento inerziale, sono inerziali tutti i riferimenti che si muovono di moto rettilineo uniforme rispetto al primo. Il Primo Principio viene più correttamente enunciato nel seguente modo: *Esistono sistemi di riferimento (detti inerziali) nei quali un corpo non soggetto a forze rimane in quiete oppure si muove di moto rettilineo uniforme.*

Si considera inerziale a tutti gli effetti un sistema di riferimento solidale con le cosiddette stelle fisse. Un sistema solidale con la superficie del pianeta Terra non è in linea di principio inerziale, in quanto la Terra, a causa della rotazione intorno al suo asse e della rivoluzione intorno al Sole, si trova in uno stato di moto accelerato rispetto al sistema delle stelle fisse. Tuttavia, può essere considerato con ottima approssimazione inerziale per molte applicazioni scientifiche e tecnologiche, per le quali lo stato di moto della Terra non è rilevante.

Il Secondo e il Terzo Principio, e tutte le leggi che se ne derivano, valgono solo nei sistemi di riferimento inerziali. Il Primo Principio serve quindi a delimitare l'ambito di validità degli altri due. Studiare la dinamica dei corpi nei riferimenti di riferimento non inerziali è possibile, ma richiede l'introduzione di particolari accorgimenti.

3.1.4 Il secondo principio (legge fondamentale)

Ci poniamo ora in un sistema di riferimento che possa essere considerato inerziale.

L'enunciato del Secondo Principio può venire decomposto in una successione di affermazioni.

- a) L'effetto di una forza \vec{F} applicata ad un corpo libero è un'accelerazione \vec{a} avente uguale direzione e verso della forza (Fig. 3.2, a sinistra).

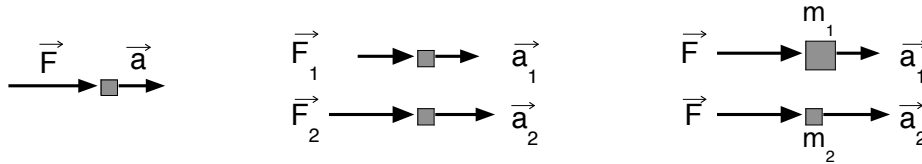


Figura 3.2: A sinistra: l'effetto di una forza è un'accelerazione. Al centro: forze diverse applicate ad uno stesso corpo. A destra: una stessa forza applicata a corpi differenti.



Figura 3.3: Interazione tra due corpi A e B : le forze che i corpi esercitano l'uno sull'altro sono uguali e contrarie: $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$. Le forze possono essere attrattive (a sinistra) o repulsive (a destra).

- b) L'intensità dell'accelerazione di un corpo è proporzionale all'intensità della forza applicata (Fig. 3.2, al centro).
- c) La medesima forza agente su corpi diversi provoca accelerazioni di modulo diverso, a causa della diversa *inerzia* dei corpi (Fig. 3.2, a destra). Quanto maggiore è l'inerzia, tanto minore è l'accelerazione. Per misurare l'inerzia di un corpo, si introduce una nuova grandezza, la *massa* m . A parità di forza agente su due corpi, vale la relazione $m_1/m_2 = a_2/a_1$ (l'accelerazione è inversamente proporzionale alla massa).
- d) Poiché la forza ha carattere vettoriale, la risultante di più forze applicate contemporaneamente ad un corpo si calcola mediante la regola del parallelogramma (Fig. 3.1, al centro).

Il Secondo Principio viene sinteticamente espresso nel seguente modo:

$$\sum_i \vec{F}_i = m \vec{a}, \quad (3.1)$$

dove $\sum_i \vec{F}_i$ rappresenta la risultante delle forze applicate, m la massa e \vec{a} l'accelerazione. Per la risoluzione di molti problemi è utile decomporre la (3.1) nelle direzioni dei tre assi cartesiani:

$$\sum_i F_{i,x} = m a_x, \quad \sum_i F_{i,y} = m a_y, \quad \sum_i F_{i,z} = m a_z. \quad (3.2)$$

3.1.5 Unità di misura

L'unità di misura della *massa* è il chilogrammo (kg), corrispondente alla massa di un campione materiale mantenuto presso l'Ufficio Internazionale dei Pesi e Misure di Sèvres, in Francia.

Nel Sistema Internazionale di unità di misura, la forza è una grandezza derivata. La sua unità è il newton (N), corrispondente alla forza che imprime l'accelerazione unitaria (1 m s^{-2}) alla massa unitaria (1 kg): $1 \text{ N} = 1 \text{ kg m s}^{-2}$.

3.1.6 Il terzo principio

Il Terzo Principio afferma: *Se un corpo A esercita una forza \vec{F}_{AB} su di un corpo B, allora il corpo B esercita sul corpo A una forza uguale e contraria $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$* (Fig. 3.3).

Il Terzo Principio viene talora chiamato anche "Principio di azione e reazione". Tale denominazione può dare luogo a malintesi, perché il termine "reazione" è utilizzato con accezioni diverse, come

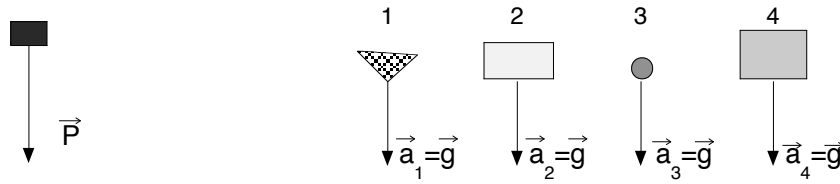


Figura 3.4: La forza di gravità agisce su tutti i corpi, spingendoli verso il basso (a sinistra). Tutti i corpi soggetti solo all'azione della forza di gravità subiscono la medesima accelerazione, che viene indicata con \vec{g} .

vedremo poco più avanti. Per ora, notiamo che le due forze \vec{F}_{BA} e \vec{F}_{AB} considerate dal Terzo Principio sono sempre applicate a due corpi diversi (Fig. 3.3), e sono tra di loro equivalenti (i termini “azione” e “reazione” sono perfettamente scambiabili).

3.1.7 Scopo e metodi della Dinamica

Dopo aver enunciato i Principi della Dinamica, vogliamo provare a fare un elenco di alcuni dei suoi scopi principali.

- Note le forze agenti su un corpo, determinarne la traiettoria. Ad esempio, si può determinare il moto dei corpi celesti conoscendo la forma dell'interazione gravitazionale.
- Determinare le forze necessarie per realizzare un prefissato tipo di movimento (ad esempio, il moto di un proiettile, o di un elettrone in un tubo a raggi catodici).
- Prevedere l'esito dell'interazione tra due o più corpi (ad esempio nell'urto tra due particelle elementari, oppure nella collisione tra due veicoli).

Per ottenere più agevolmente la soluzione dei problemi, sono state dedotte dai Principi molte leggi particolari, e sono state introdotte nuove grandezze fisiche. Nei prossimi paragrafi ci occuperemo di alcuni di questi sviluppi.

Un caso importante è rappresentato dalla particolare condizione in cui le forze in gioco si equilibrano, $\sum_i \vec{F}_i = 0$. Questo caso è oggetto di studio della *Statica*, ed ha particolare interesse nel campo dell'Ingegneria civile e meccanica.

3.2 Esempi di forze

Prendiamo ora in considerazione alcuni esempi di forze particolarmente importanti.

3.2.1 La forza di gravità

La forza di gravità è la forza che, in prossimità della superficie terrestre, attira tutti i corpi verso il basso; la indicheremo con il simbolo \vec{P} (Fig. 3.4, a sinistra). Si verifica sperimentalmente che tutti i corpi soggetti alla sola forza di gravità si muovono verso il basso con la stessa accelerazione (Fig. 3.4, a destra). L'*accelerazione di gravità* viene convenzionalmente indicata con \vec{g} . Pertanto, poiché è sempre $\vec{P} = m\vec{g}$, la forza peso viene spesso indicata semplicemente con $m\vec{g}$.

L'espressione formale del secondo principio è

$$\underbrace{\vec{F}}_{\text{causa}} = m \underbrace{\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}}_{\text{effetto}} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{m\vec{g}}_{\text{causa}} = m \underbrace{\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}}_{\text{effetto}}. \quad (3.3)$$

Il modulo dell'accelerazione di gravità ha il valore approssimato $g=9.8 \text{ m s}^{-2}$.



Figura 3.5: Interazione gravitazionale tra una sfera estesa di massa M e un corpo puntiforme di massa m .

L'accelerazione di gravità g varia con la latitudine e l'altitudine. Ad esempio, rimanendo al livello del mare, $g=9.78 \text{ m s}^{-2}$ all'equatore e $g=9.83 \text{ m s}^{-2}$ al Polo Nord. Se invece consideriamo fissa la latitudine di 46° Nord, $g=9.8 \text{ m s}^{-2}$ al livello del mare e $g=9.79 \text{ m s}^{-2}$ all'altitudine di 400 m.

Il modulo della forza di gravità è chiamato *peso*. La relazione tra peso e massa è dunque $P = mg$. È importante tener ben chiara la differenza tra massa e peso: la massa m è una caratteristica intrinseca dei corpi, mentre il peso è una forza che dipende dalla posizione del corpo.

Esempio: un corpo di massa $m=1 \text{ kg}$ è soggetto ad una forza peso di circa 9.8 N.

Si noti che nel linguaggio comune la parola "peso" è spesso utilizzata come sinonimo di "massa", per cui il "peso" viene espresso in chilogrammi. Tale confusione deve essere assolutamente evitata in campo scientifico e tecnologico.

3.2.2 La forza di interazione gravitazionale

La forza di gravità non è altro che una manifestazione particolare della forza di interazione gravitazionale. La forza gravitazionale agisce tra due qualsiasi corpi ed è di natura attrattiva (Fig. 3.3, a sinistra). Il suo modulo vale

$$F_{\text{grav}} = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (3.4)$$

dove m_1 e m_2 sono le masse dei due corpi interagenti e r è la loro distanza. G è una costante universale, detta costante gravitazionale: il suo valore sperimentale attualmente accertato è $G = (6.673 \pm 0.010) \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$.

La forza di interazione gravitazionale è molto debole, come si può verificare valutando la sua intensità per due corpi di massa 1 kg posti alla distanza di 1 m. Può tuttavia diventare molto importante quando almeno una delle due masse in gioco è molto grande (è tipicamente il caso delle masse astronomiche, ad esempio le masse delle stelle e dei pianeti).

Consideriamo ad esempio l'interazione gravitazionale tra un corpo di massa $m_1 = m$ e il pianeta Terra, di massa $m_2 = M \simeq 6 \times 10^{24} \text{ kg}$. Se il corpo è posto sulla superficie della Terra, la sua distanza dal centro della Terra è $R \simeq 6.37 \times 10^6 \text{ m}$.

A rigore, ogni elemento di volume del pianeta Terra, di massa dm_i , interagisce con il corpo di massa $m_1 = m$ secondo l'eq. (3.4), con valori differenti di distanza r_i (Fig. 3.5, a sinistra). Si può tuttavia dimostrare che per un corpo a simmetria sferica, come la Terra, l'effetto gravitazionale integrato su tutto il volume è uguale all'effetto della massa totale M concentrata nel centro della sfera (Fig. 3.5, a destra), per cui la forza di interazione gravitazionale si può esprimere come

$$F_{\text{grav}} = G \frac{mM}{R^2}. \quad (3.5)$$

La forza che agisce sul corpo di massa m posto sulla superficie terrestre non è altro che la forza di gravità, il cui modulo (peso) è dunque

$$P = G \frac{mM}{R^2} = m \left(\frac{GM}{R^2} \right) = mg, \quad \text{per cui } g = GM/R^2. \quad (3.6)$$

Per il terzo principio della dinamica, alla forza di gravità \vec{P} che agisce sul corpo di massa m corrisponde una forza uguale e contraria $-\vec{P}$ applicata alla Terra. L'accelerazione della Terra, $a = Gm/R^2$ è però del tutto trascurabile.

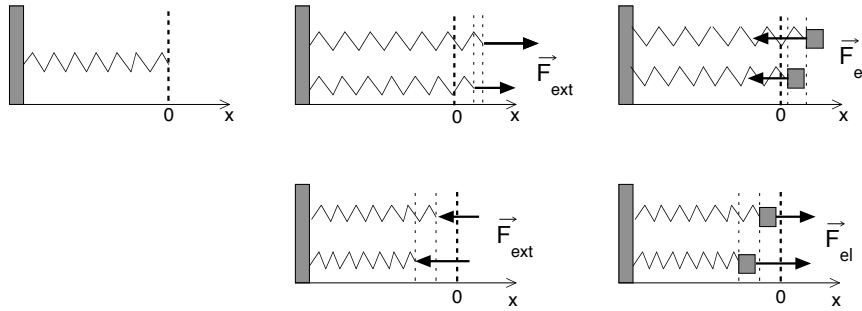


Figura 3.6: A sinistra: molla a riposo. Al centro: molla deformata per trazione (sopra) o per compressione (sotto). A destra: forza elastica esercitata da una molla estesa (sopra) o compressa (sotto).

È interessante osservare come la massa misuri sia la quantità di materia presente in un corpo e responsabile dell'interazione gravitazionale (eq. 3.4), sia l'inerzia del corpo (eq. 3.1). Per distinguere i due diversi significati della massa, si sono introdotti i termini “massa gravitazionale” e “massa inerziale”.

3.2.3 La forza elastica

Per deformare una molla, è necessario applicare una forza F_{ext} alla sua estremità libera (Fig. 3.6, al centro). La deformazione x della molla è proporzionale alla forza applicata,

$$F_{\text{ext}} = k_{\text{el}} x, \quad (3.7)$$

dove k_{el} è una costante di proporzionalità, detta *costante elastica*.

Per il terzo principio della dinamica, una molla deformata, cioè stirata o compressa, reagisce con una forza uguale e contraria $F_{\text{el}} = -F_{\text{ext}}$ che tende a farla ritornare alla lunghezza a riposo (Fig. 3.6, a destra). Tale forza, detta *forza elastica*, ha dunque verso opposto alla deformazione x e modulo proporzionale a x ; in formula:

$$F_{\text{el}} = -k_{\text{el}} x. \quad (3.8)$$

Poiché il problema è unidimensionale, non è necessaria la notazione vettoriale.

Se all'estremità libera della molla è attaccato un corpo di massa m (Fig. 3.6, a destra), il corpo subisce un'accelerazione a . L'espressione del secondo principio è

$$\underbrace{F_{\text{el}}}_{\text{causa}} = \underbrace{ma = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}}_{\text{effetto}} \Rightarrow \underbrace{-kx}_{\text{causa}} = \underbrace{ma = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}}_{\text{effetto}}, \quad (3.9)$$

da cui si ricava l'equazione differenziale del moto della molla

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m} x. \quad (3.10)$$

3.2.4 Forze attive e forze di reazione vincolare

Un corpo lasciato libero sotto l'azione della forza di gravità \vec{P} cade con accelerazione \vec{g} . Se lo stesso corpo viene appoggiato su un tavolo, la forza peso agisce ancora, ma il corpo rimane in quiete. Il tavolo rappresenta un *vincolo*, che equilibra il peso del corpo con una forza \vec{N} uguale e contraria (Fig. 3.7, a sinistra).

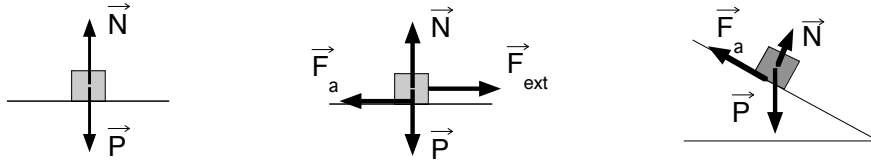


Figura 3.7: Reazioni vincolari parallela e perpendicolare alla superficie di contatto.

Forza normale o reazione vincolare normale

La forza \vec{N} è un esempio di *forza di reazione vincolare*, cioè di forza che esiste solo come reazione ad un'altra forza, in questo caso la forza di gravità \vec{P} , e che impedisce al corpo di muoversi liberamente, cioè lo vincola. La chiamiamo forza di reazione normale o *forza normale* in quanto agisce sempre in direzione normale alla superficie di appoggio. Se il corpo è appoggiato su un piano inclinato, la forza normale \vec{N} sarà perpendicolare al piano inclinato, e potrà equilibrare solo la componente del peso nella direzione perpendicolare al piano.

Per chiarire il significato del termine “reazione”, consideriamo bene il semplice esempio di un corpo soggetto alla forza di gravità. Alla forza di gravità \vec{P} applicata al corpo corrisponde, per il Terzo Principio, una forza $-\vec{P}$ applicata nel centro di massa del pianeta Terra. Se il corpo viene appoggiato su un tavolo, il tavolo oppone alla forza di gravità una reazione vincolare normale $\vec{N} = -\vec{P}$ applicata al corpo stesso. La forza corrispondente a \vec{N} per il Terzo Principio è una forza $-\vec{N}$ applicata al tavolo (il corpo grava sul tavolo con una forza uguale al suo peso).

Forza d'attrito tra superfici solide

Nel caso generale, si devono considerare due tipi di reazione vincolare (Fig. 3.7, al centro e a destra), una perpendicolare alla superficie di contatto (la *forza normale* \vec{N}) ed una parallela alla superficie (la *forza d'attrito* \vec{F}_a). Se la forza d'attrito è nulla, $\vec{F}_a = 0$, la superficie di contatto è detta *liscia*.

Si verifica sperimentalmente che la forza d'attrito tra superfici solide è: *a)* indipendente dall'estensione della superficie di contatto; *b)* proporzionale in modulo alla reazione normale \vec{N} .

Attrito statico. Se i due corpi a contatto di superficie sono *in quiete* uno rispetto all'altro, la forza d'attrito \vec{F}_a è uguale e contraria alla forza attiva applicata \vec{F}_{ext} parallela alla superficie. Il modulo della forza d'attrito si adegua cioè al modulo della forza attiva (perciò si parla di reazione vincolare). C'è però un limite superiore al modulo della forza d'attrito statico:

$$F_a \leq \mu_s N, \quad (3.11)$$

s dove μ_s è il *coefficiente d'attrito statico*, N il modulo della forza normale alla superficie. Se la forza attiva applicata supera in modulo il valore $\mu_s N$, la forza d'attrito non è più in grado di compensarla, ed il corpo inizia a muoversi.

Attrito cinetico (o dinamico). Se i due corpi a contatto di superficie sono in moto relativo, la forza d'attrito applicata a ciascuno dei due corpi ha verso opposto al verso della velocità relativa, e modulo

$$F_a = \mu_c N, \quad (3.12)$$

dove μ_c , detto *coefficiente di attrito cinetico*, è: *a)* indipendente dalla velocità relativa; *b)* minore del coefficiente di attrito statico: $\mu_c \leq \mu_s$.

3.2.5 Moto circolare e forza centripeta

Studiamo la dinamica del moto di un corpo di massa m lungo una traiettoria circolare, di raggio R e centro nel punto O . Per fissare le idee, pensiamo ad un corpo vincolato a mantenere inalterata

la distanza R dal punto fisso O mediante una fune di massa trascurabile. Come abbiamo già visto nel capitolo dedicato alla Cinematica (§ 2.5), è conveniente descrivere il moto circolare in termini di coordinate angolari: angolo θ , velocità angolare ω , accelerazione angolare α .

Nel moto circolare, la velocità \vec{v} varia continuamente in direzione, e può variare anche in modulo. La variazione in direzione corrisponde ad un'accelerazione centripeta \vec{a}_N , diretta verso il centro O e di modulo $v^2/R = \omega^2 R$. L'accelerazione centripeta è prodotta da una *forza centripeta*

$$F_N = m \frac{v^2}{R} = m \omega^2 R. \quad (3.13)$$

La variazione in modulo della velocità corrisponde ad un'accelerazione tangenziale $a_T = dv/dt = R\alpha$, cui deve corrispondere un'ulteriore forza \vec{F}_T , che si somma vettorialmente alla forza centripeta \vec{F}_N .

Se il modulo di \vec{v} è costante, la velocità angolare ω è costante, e il moto è *circolare uniforme*; in tal caso l'accelerazione è puramente normale.

3.2.6 Le forze nei sistemi di riferimento non inerziali

Come abbiamo già osservato sopra, il Secondo Principio $\vec{F} = m\vec{a}$ vale solo nei sistemi di riferimento inerziali. Proviamo a capire meglio la differenza tra riferimenti inerziali e riferimenti non inerziali con un esempio particolarmente semplice.

Consideriamo un autobus che si muove di moto rettilineo ed uniforme ed un passeggero in piedi sull'autobus. Descriviamo il moto del passeggero rispetto ad un riferimento $O'x'y'z'$ solidale con l'autobus e ad un riferimento $Oxyz$ solidale con la strada. Finché il moto è rettilineo ed uniforme, il passeggero non subisce accelerazione rispetto ad alcuno dei due riferimenti; il Secondo Principio è rispettato, in quanto sul passeggero non agiscono forze nella direzione del moto.

Vediamo ora cosa succede quando l'autobus rallenta, cioè è affetto da accelerazione \vec{a}_t di verso opposto alla velocità rispetto al riferimento $Oxyz$. Il passeggero si sente accelerato in avanti rispetto all'autobus, tanto da rischiare di cadere se non si è ancora ai supporti. Rispetto al riferimento inerziale $Oxyz$ solidale con la strada, in cui vale il Secondo Principio, il passeggero, non soggetto a forze, tende a mantenere il moto rettilineo a velocità costante, mentre l'autobus invece rallenta. Rispetto al riferimento $O'x'y'z'$ solidale con l'autobus, ora non più inerziale, non vale più il Secondo Principio. L'accelerazione sentita dal passeggero non corrisponde in effetti ad alcuna forza reale. È possibile utilizzare ancora il Secondo Principio ($\sum \vec{F}_i = m\vec{a}$) anche nel riferimento non inerziale $O'x'y'z'$, purché alle forze realmente agenti si aggiunga nella sommatoria anche la *forza apparente* $\vec{F}_t = -m\vec{a}_t$ (detta in questo caso "forza d'inerzia").

3.3 Le forze fondamentali d'interazione

Abbiamo descritto, al § 3.2, varie forze che si incontrano frequentemente in natura; altre ne incontreremo più avanti. Abbiamo anche visto che la forza di gravità altro non è che una manifestazione particolare dell'interazione gravitazionale, che agisce tra qualsiasi coppia di corpi. Ci si può pertanto domandare se anche le altre forze sin qui considerate siano manifestazioni di forme più generali di interazione.

Lo sviluppo dell'indagine scientifica ha portato finora a riconoscere quattro forme fondamentali di interazione.

- *Interazione gravitazionale*, che come abbiamo visto è responsabile dell'attrazione tra due corpi qualsiasi, secondo l'eq. (3.4).
- *Interazione elettromagnetica*, che agisce tra corpi elettricamente carichi. Approfondiremo più avanti alcuni aspetti dell'elettromagnetismo. Ci limitiamo per ora a ricordare una delle manifestazioni più note dell'interazione elettromagnetica, la legge di Coulomb: tra due cariche elettriche in quiete, Q_1 e Q_2 , poste a distanza R agisce una forza attrattiva o repulsiva, a

seconda che le cariche abbiano segni opposti oppure lo stesso segno, il cui modulo vale

$$F_{\text{coul}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{R^2}. \quad (3.14)$$

Manifestazioni più complicate dell'interazione elettromagnetica riguardano le interazioni tra cariche elettriche in movimento.

Gran parte delle forze macroscopiche (ad esempio la forza elastica e le forze di attrito) sono riconducibili, a livello atomico, ad interazioni di natura elettromagnetica.

- *Interazione nucleare forte*, che agisce solo a livello nucleare, cioè per distanze dell'ordine delle dimensioni del nucleo atomico, ed è responsabile, ad esempio, della coesione dei nuclei atomici stessi.
- *Interazione nucleare debole*, che pure agisce solo a livello nucleare, ed è responsabile di alcuni tipi di decadimento radioattivo (decadimenti "beta").

3.4 Quantità di moto

Consideriamo due corpi di dimensioni trascurabili (due "punti materiali") dotati di masse diverse, rispettivamente m e M , e supponiamo che i due punti si muovano con la stessa velocità \vec{v} . Dal punto di vista cinematico i due punti si comportano nello stesso modo (hanno la stessa velocità). Le loro proprietà dinamiche sono invece differenti, in ragione del diverso valore della massa (cioè della diversa inerzia).

Introduciamo una nuova grandezza, che consente di differenziare le proprietà dinamiche di corpi di massa diversa: la *quantità di moto*, detta anche *momento lineare* (in inglese *linear momentum*), definita come il prodotto della massa per il vettore velocità:

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (3.15)$$

La quantità di moto è un vettore, caratterizzato da direzione, verso ed intensità. La sua intensità si misura in kg m s^{-1} (unità di misura priva di un nome proprio).

Più avanti incontreremo un'altra grandezza, l'energia cinetica $E_k = mv^2/2$, che combina massa e velocità in modo diverso dalla quantità di moto, e risponde quindi a differenti esigenze di descrizione delle proprietà dinamiche dei corpi.

Vediamo ora quali sono i principali utilizzi della quantità di moto.

3.4.1 Generalizzazione del Secondo Principio

Il Secondo Principio è stato espresso più sopra come $\vec{F} = m\vec{a}$, considerando la massa m come costante. Con alcuni facili passaggi matematici si può riformulare il Secondo Principio:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (3.16)$$

L'effetto della forza è cioè una variazione della quantità di moto. L'equazione

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (3.17)$$

rappresenta un'espressione più generale del Secondo Principio, valida anche nel caso in cui la massa non sia costante; si pensi ad esempio al moto di un veicolo, che brucia carburante e progressivamente riduce la sua massa totale (un caso particolarmente significativo è quello dei razzi, in cui il carburante contribuisce in modo notevole alla massa totale iniziale).

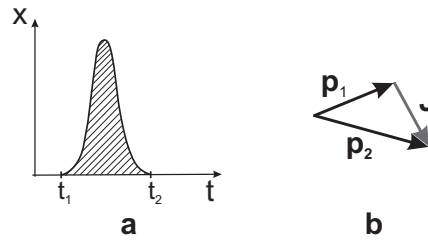


Figura 3.8: Impulso: (a) modulo della forza in funzione del tempo; (b) relazione vettoriale tra impulso e quantità di moto

3.4.2 Impulso e quantità di moto

Dall'eq. (3.17) si vede che l'azione di una forza \vec{F} per un intervallo infinitesimo di tempo dt produce la variazione infinitesima di quantità di moto

$$d\vec{p} = \vec{F} dt. \quad (3.18)$$

Consideriamo ora una forza $\vec{F}(t)$, variabile nel tempo, che agisce su un corpo per un intervallo di tempo compreso tra gli istanti t_1 e t_2 . Si definisce impulso \vec{J} l'integrale definito della forza per il tempo (Fig. 3.8):

$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt. \quad (3.19)$$

L'impulso è una grandezza vettoriale, la cui intensità si misura in N s. L'impulso è particolarmente utile per descrivere i casi in cui una forza intensa e variabile nel tempo agisce per un intervallo di tempo molto limitato, tipicamente nei fenomeni di urto: si pensi alla collisione tra due veicoli, all'urto tra una mazza da baseball e la pallina, all'interazione tra due atomi di un gas oppure tra due o più particelle elementari.

Facendo uso dell'eq. (3.19) è facile vedere che

$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{p}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} d\vec{p} = \Delta\vec{p}, \quad (3.20)$$

cioè che l'impulso è uguale alla variazione della quantità di moto.

3.4.3 Legge di conservazione della quantità di moto

Vogliamo ora introdurre un'importante conseguenza del Terzo Principio. Consideriamo due corpi che interagiscono tra di loro (Fig. 3.3) ma sono completamente *isolati* dal resto del mondo, cioè non interagiscono con alcun altro corpo. Per il Terzo Principio, le forze \vec{F}_{BA} e \vec{F}_{AB} sono uguali e contrarie. Facendo uso dell'eq. (3.17), questo fatto può essere espresso in termini di quantità di moto:

$$\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{p}_A}{dt} = -\frac{d\vec{p}_B}{dt}. \quad (3.21)$$

Ciò significa che i due corpi subiscono variazioni di quantità di moto uguali e contrarie. Se si considerano intervalli finiti di tempo,

$$\Delta\vec{p}_A = -\Delta\vec{p}_B \quad (\text{sistema isolato}) \quad (3.22)$$

Possiamo introdurre la *quantità di moto totale*, somma delle quantità di moto dei due corpi: $\vec{P}_{\text{tot}} = \vec{p}_A + \vec{p}_B$. Se i due corpi, pur interagendo tra loro, sono isolati dal resto del mondo,

$$\Delta\vec{P}_{\text{tot}} = \Delta\vec{p}_A + \Delta\vec{p}_B = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{P}_{\text{tot}} = \text{costante} \quad (\text{sistema isolato}) \quad (3.23)$$

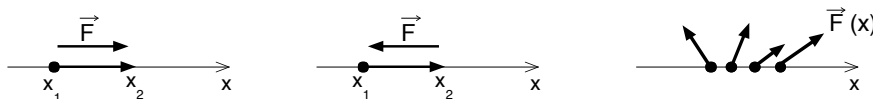


Figura 3.9: Lavoro di una forza per uno spostamento rettilineo: lavoro motore (a sinistra) e resistente (al centro); forza dipendente dalla posizione (a destra).

L'eq. (3.23) rappresenta la *legge di conservazione della quantità di moto* per i sistemi isolati. Essa può essere generalizzata ad un sistema composto da un numero qualsiasi di corpi tra di loro interagenti, ma isolati dal resto del mondo, cioè in assenza di forze esterne al sistema:

$$\vec{P}_{\text{tot}} = \text{costante} \quad (\text{sistema isolato}), \quad \text{dove ora} \quad \vec{P}_{\text{tot}} = \sum_i \vec{p}_i. \quad (3.24)$$

La legge di conservazione della quantità di moto è molto utile nella pratica, in quanto stabilisce un collegamento quantitativo tra la situazione dinamica di un sistema isolato di due o più corpi prima e dopo l'interazione, indipendentemente dalla conoscenza delle modalità dell'interazione (cioè dell'entità e dipendenza temporale delle forze in gioco). Incontreremo più avanti altre leggi di conservazione (ad esempio la legge di conservazione dell'energia meccanica).

3.5 Lavoro e potenza

Vogliamo ora introdurre una nuova famiglia di grandezze, tra di loro strettamente collegate - lavoro e potenza (§ 3.5) ed energia (§ 3.6) - che rivestono un ruolo importante in vari campi della Fisica e delle sue applicazioni tecnologiche.

3.5.1 Lavoro. Caso del moto rettilineo.

Per introdurre il *lavoro*, consideriamo prima il caso semplice di un corpo in movimento su di una traiettoria rettilinea.

Supponiamo che sul corpo agisca una forza \vec{F} *parallela allo spostamento* e di *modulo costante* (Fig. 3.9, a sinistra e al centro). In tal caso, il lavoro W per un dato spostamento Δx del corpo è definito dal semplice prodotto

$$W = F \Delta x. \quad (3.25)$$

Il prodotto è

- positivo se forza e spostamento sono concordi in verso (lavoro motore);
- negativo se forza e spostamento sono discordi in verso (lavoro resistente).

L'unità di misura del lavoro è il joule (J): $1 \text{ J} = 1 \text{ N m}$.

Esempio: Un sasso di massa $m=1 \text{ kg}$ cade verticalmente da un'altezza $h=2 \text{ m}$. La forza peso è $P = mg \simeq 10 \text{ N}$. Il lavoro della forza peso per la caduta di 2 m è $W=20 \text{ J}$, positivo. Se ora sollevo lentamente il peso (con accelerazione trascurabile) riportandolo all'altezza h , dovrò esercitare una forza verso l'alto, il cui lavoro sarà ancora 20 J , positivo (lavoro motore). Per lo spostamento verso l'alto, la forza peso farà invece un lavoro resistente di -20 J .

Si noti che il lavoro meccanico in Fisica ha un significato ben definito, che non equivale esattamente al significato del lavoro nel linguaggio comune.

Consideriamo ora il caso di una forza sempre costante in direzione e modulo, ma *non parallela allo spostamento*. Indichiamo con θ l'angolo tra la direzione della forza e la direzione dello spostamento. Il lavoro è definito in tal caso come

$$W = F \Delta x \cos \theta = \vec{F} \cdot \vec{\Delta x}. \quad (3.26)$$

Nell'ultimo membro di destra dell'equazione abbiamo fatto uso della notazione sintetica del prodotto scalare dei due vettori \vec{F} e $\vec{\Delta x}$.

Il lavoro dipende quindi non solo dal modulo della forza e dall'entità dello spostamento, ma anche dall'angolo tra forza e spostamento. Si noti che nei due casi limite $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ rad l'eq. (3.26) equivale alla (3.25) vista sopra. Se invece la forza è perpendicolare allo spostamento ($\theta = \pi/2$), il suo lavoro è nullo.

Consideriamo infine il caso di una forza $\vec{F}(x)$ che varia al variare della posizione x . Se la forza è comunque parallela allo spostamento, il suo lavoro per lo spostamento dalla posizione iniziale x_1 alla posizione finale x_2 è definito dall'integrale

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx. \quad (3.27)$$

Esempio: Vogliamo comprimere una molla, di costante elastica k_{el} e inizialmente a riposo, riducendo la sua lunghezza di una deformazione x_f . La forza da applicare è proporzionale alla deformazione, $F_{ext} = kx$, e il lavoro è pertanto

$$W = \int_0^{x_f} F(x) dx = \int_0^{x_f} k_{el}x dx = \frac{1}{2}k_{el}x_f^2. \quad (3.28)$$

Se la forza ha direzione diversa dallo spostamento (Fig. 3.9, a destra), il suo lavoro per lo spostamento dalla posizione iniziale x_1 alla posizione finale x_2 è definito dall'integrale

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F \cos \theta dx = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F} \cdot d\vec{x}, \quad (3.29)$$

dove sia F che θ sono funzioni della posizione x . Nell'ultimo membro della (3.29), il puntino \cdot indica il prodotto scalare tra i vettori \vec{F} e $d\vec{x}$.

3.5.2 Lavoro. Caso generale.

Consideriamo ora uno spostamento lungo una traiettoria tridimensionale, da una posizione iniziale individuata dal vettore posizione \vec{r}_1 ad una posizione finale individuata dal vettore posizione \vec{r}_2 (Fig. 3.10, a sinistra). Il caso generale del lavoro di una forza variabile in direzione, verso e intensità per uno spostamento lungo una qualsiasi traiettoria tridimensionale (Fig. 3.10, a destra) viene espresso generalizzando l'eq. (3.29) mediante l'espressione dell'integrale lungo un cammino

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (3.30)$$

Senza entrare in dettagli matematici sull'integrale lungo un cammino, osserviamo solo che:

- Il lavoro dipende solo dalla componente della forza parallela allo spostamento istantaneo, cioè tangente alla traiettoria.
- La componente della forza perpendicolare allo spostamento istantaneo non fa lavoro. Non fanno quindi lavoro né la forza centripeta né la reazione vincolare normale.

3.5.3 Potenza

Il rapporto tra il lavoro W di una forza e l'intervallo di tempo Δt in cui la forza agisce si chiama *potenza media*:

$$P_m = \frac{W}{\Delta t}. \quad (3.31)$$

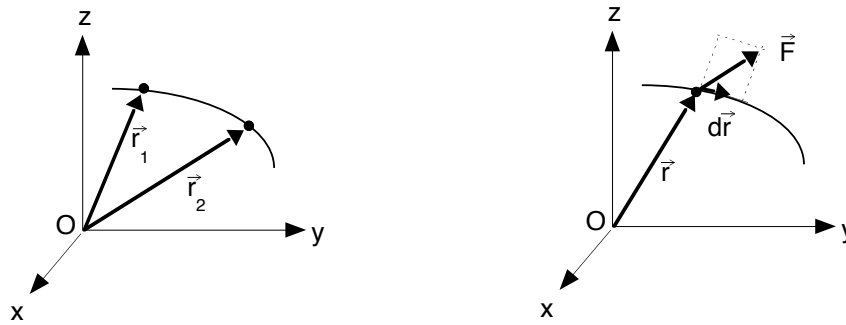


Figura 3.10: Calcolo del lavoro di una forza per uno spostamento lungo una traiettoria tridimensionale.

Se si fa tendere a zero l'intervallo di tempo, è possibile considerare una *potenza istantanea*:

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}, \quad (3.32)$$

dove l'ultima uguaglianza si ottiene ricordando che $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ e $\vec{v} = d\vec{r}/dt$.
L'unità di misura della potenza è il watt (W): $1 \text{ W} = 1 \text{ J s}^{-1}$.

3.6 Energia

3.6.1 Energia cinetica

Abbiamo visto più sopra che corpi puntiformi di masse diverse che si muovono con la stessa velocità \vec{v} , pur essendo cinematicamente equivalenti, hanno differenti proprietà dinamiche. Per tener conto di questo fatto, abbiamo introdotto il vettore *quantità di moto* $\vec{p} = m\vec{v}$.

Un'altra grandezza che tiene conto sia della massa che della velocità è l'*energia cinetica*

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2. \quad (3.33)$$

L'energia cinetica è una grandezza scalare, e dipende dal quadrato della velocità (mentre la quantità di moto è un vettore e dipende linearmente dalla velocità). Energia cinetica e quantità di moto hanno quindi significati diversi; per fare un semplice esempio, nel moto circolare uniforme l'energia cinetica è costante mentre la quantità di moto varia con continuità.

È facile verificare che l'energia cinetica ha le stesse dimensioni del lavoro, e pertanto si misura in joule.

In realtà, tra energia cinetica e lavoro esiste una relazione molto stretta, che viene formalizzata dal cosiddetto teorema dell'energia cinetica: *il lavoro totale fatto su un corpo è sempre uguale alla variazione della sua energia cinetica*.

Nel caso particolare di una forza costante parallela allo spostamento, la dimostrazione del teorema si fa nel modo seguente. Per uno spostamento infinitesimo dx , il lavoro infinitesimo è

$$dW = F dx = m a dx = m \frac{dv}{dt} dx = m \frac{dx}{dt} dv = m v dv. \quad (3.34)$$

Per uno spostamento finito dal punto 1 al punto 2, il lavoro si ottiene integrando:

$$W = \int_1^2 F dx = \int_1^2 m v dv = m \int_{v_1}^{v_2} v' dv' = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = E_{k,2} - E_{k,1}. \quad (3.35)$$

L'espressione generale del teorema, valida per qualsiasi traiettoria e qualsiasi siano le forze agenti sul corpo, è:

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \left(\sum \vec{F}_i \right) \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = E_{k,2} - E_{k,1} = \Delta E_k. \quad (3.36)$$

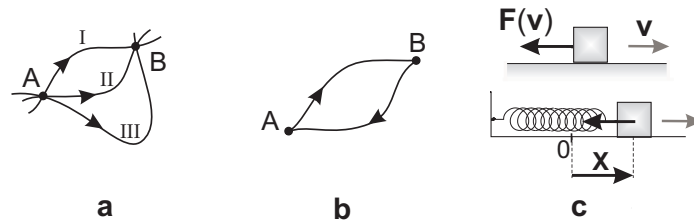


Figura 3.11: (a) Il lavoro in genere dipende dal cammino; (b) se il lavoro per qualsiasi cammino chiuso è nullo, la forza è conservativa; (c) la forza elastica è conservativa, la forza d'attrito non è conservativa

3.6.2 Forze conservative ed energia potenziale

Esistono alcune forze che godono della seguente importante proprietà: il lavoro svolto per lo spostamento di un corpo da un punto generico A ad un altro punto generico B dipende solo dalla posizione dei due punti A e B , non dal cammino particolare percorso tra A e B . Le forze che godono di questa proprietà sono dette *forza conservative* (Fig. 3.11).

La stessa proprietà può essere alternativamente espressa nel modo seguente: una forza si dice conservativa se il suo lavoro è nullo per qualsiasi percorso chiuso.

Si può dimostrare che sono conservative:

- le forze unidimensionali dipendenti solo dalla posizione, ad esempio la forza elastica $F_e = -kx$;
- le forze uniformi, ad esempio la forza peso;
- le forze centrali, cioè le forze dirette sempre verso un unico punto O , ad esempio la forza d'interazione gravitazionale e la forza d'interazione elettrostatica.

Non sono invece conservative le forze che dipendono dalla velocità o dal tempo (ad esempio le forze d'attrito, di cui ci occuperemo più avanti).

Se una forza è conservativa, si può definire una nuova grandezza, detta *energia potenziale* E_p , funzione della posizione \vec{r} . L'energia potenziale $E_p(\vec{r})$ di un campo di forza $\vec{F}(\vec{r})$ è legata al lavoro della forza \vec{F} dalla relazione:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_p(A) - E_p(B) = -\Delta E_p. \quad (3.37)$$

L'energia potenziale è sempre definita a meno di una costante additiva.

Esempi:

- per la forza di gravità: $\Delta E_p = mg \Delta h$;
- per la forza elastica $E_p = kx^2/2 + \text{cost.}$

L'energia potenziale misura la *potenzialità* di compiere lavoro, e quindi rappresenta una grandezza utile dal punto di vista applicativo.

3.6.3 Legge di conservazione dell'energia meccanica

Se su di un corpo agiscono *solo forze conservative* (o se le eventuali forze non conservative non fanno lavoro perché perpendicolari allo spostamento), allora vale l'ultima uguaglianza nella seguente equazione:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \Delta E_k = -\Delta E_p. \quad (3.38)$$

Ciò significa che la variazione di energia cinetica è uguale e contraria alla variazione di energia potenziale; resta pertanto costante l'energia totale E_T , somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale:

$$E_T = E_k(A) + E_p(A) = E_k(B) + E_p(B) = \text{costante} . \quad (3.39)$$

La legge di conservazione dell'energia meccanica rappresenta un importante strumento per la soluzione di problemi.

3.6.4 Forze dissipative

Le forze *non conservative* sono anche dette forze dissipative. Esempi tipici di forze non conservative sono le forze di attrito:

- l'attrito tra superfici solide, che dipende dal verso della velocità (la forza d'attrito ha sempre verso opposto alla velocità), ma non dal suo modulo;
- l'attrito nei fluidi, gas e liquidi (ad esempio la resistenza dell'aria), che dipende non solo dal verso, ma anche dal modulo della velocità.

Quando su un corpo agiscono forze non conservative, l'energia meccanica non si conserva, bensì diminuisce progressivamente. L'energia meccanica è progressivamente trasformata in calore, ossia *dissipata*.

Vedremo più avanti che anche l'energia dissipata in calore può essere tenuta in conto come una diversa forma di energia, l'energia termica. Anzi, scopriremo che esistono diverse forme di energia (energia elettrostatica, energia chimica, energia nucleare, etc.), e che vale un principio generale di conservazione dell'energia totale (il Primo Principio della Termodinamica, § 4.4). L'energia termica può essere ritrasformata in energia meccanica (è ciò che avviene nei motori termici), ma sempre solo parzialmente (questa limitazione è formalizzata dal Secondo Principio della Termodinamica, § 4.7).

3.7 Moto armonico

Abbiamo visto in precedenza (§ 3.2, Fig. 3.6) che un corpo di massa m collegato ad una molla di costante elastica k_e è soggetto ad una forza

$$F_e = -k_e x , \quad (3.40)$$

dove x è la deformazione della molla rispetto alla lunghezza d'equilibrio. Sappiamo per esperienza che un corpo collegato ad una molla e lasciato libero effettua un moto oscillatorio. Vogliamo determinare la legge oraria di questo moto oscillatorio in funzione della massa m e della costante elastica k_e .

Ricordando che, per il Secondo Principio, $F_e = ma$, e che l'accelerazione è la derivata seconda della posizione, possiamo riscrivere l'equazione del moto (3.40) per la forza elastica

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k_e x . \quad (3.41)$$

3.7.1 Oscillatore armonico

Nella (3.41), la derivata seconda della variabile x è proporzionale alla variabile x stessa, cambiata di segno. Questo tipo di equazione differenziale si trova spesso in molte altre situazioni, sia della meccanica che dell'elettromagnetismo. Conviene pertanto affrontare il problema in modo generalizzato. Allo scopo, riassumiamo i due parametri m e k_e in un unico parametro $\omega^2 = k_e/m$, definito positivo. L'eq. (3.41) diviene

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 . \quad (3.42)$$

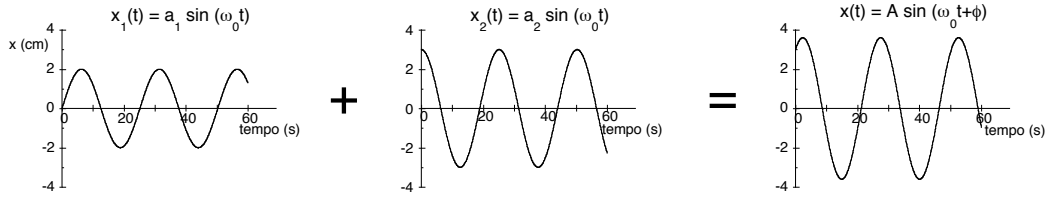


Figura 3.12: Oscillatore armonico con frequenza angolare $\omega = 2.5$ rad/s: due soluzioni linearmente indipendenti (a sinistra e al centro) e loro somma (a destra).

Si chiama *oscillatore armonico* unidimensionale qualsiasi sistema che obbedisca a questa equazione, indipendentemente dal significato della variabile x (una coordinata di posizione, un angolo, una carica elettrica, un vettore campo elettrico, etc.) La (3.42) descrive comunque sempre l'effetto di una forza di richiamo proporzionale alla deviazione del sistema dalla situazione di equilibrio $x = 0$.

3.7.2 Moto armonico semplice

Cerchiamo una legge oraria $x(t)$ che sia soluzione dell'eq. (3.42). La funzione $x(t)$ deve godere della proprietà che la sua derivata seconda è uguale alla funzione stessa cambiata di segno. È facile verificare che le funzioni trigonometriche *seno* e *coseno* godono di questa proprietà, per cui due soluzioni linearmente indipendenti della (3.42) sono (Fig. 3.12, a sinistra e al centro):

$$x_1(t) = a_1 \sin(\omega t), \quad x_2(t) = a_2 \cos(\omega t). \quad (3.43)$$

La soluzione generale dell'equazione del moto (3.42) è la combinazione lineare delle due soluzioni (3.43):

$$x(t) = a_1 \sin(\omega t) + a_2 \cos(\omega t). \quad (3.44)$$

Con pochi semplici passaggi, facendo riferimento ad un generico triangolo rettangolo di cateti a_1 e a_2 e ipotenusa $A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ (Fig. 3.13, a sinistra), la (3.44) può essere trasformata

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{A}{A} [a_1 \sin(\omega t) + a_2 \cos(\omega t)] \\ &= A \left[\frac{a_1}{A} \sin(\omega t) + \frac{a_2}{A} \cos(\omega t) \right] \\ &= A [\cos \phi \sin(\omega t) + \sin \phi \cos(\omega t)] \end{aligned}$$

nella forma più compatta (Fig. 3.12, a destra):

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi), \quad (3.45)$$

$$\text{dove: } \begin{cases} A & \text{è l'ampiezza;} \\ \omega t + \phi & \text{è la fase: } \begin{cases} \omega & \text{è la frequenza angolare;} \\ \phi & \text{è la fase iniziale.} \end{cases} \end{cases}$$

Abbiamo già incontrato un caso particolare della (3.45) al § 2.1, come esempio di legge oraria (Fig. 2.2 a destra).

3.7.3 Frequenza e periodo

La frequenza angolare ω è determinata dalle caratteristiche del fenomeno in esame; per la molla, ad esempio, $\omega^2 = k_e/m$. Il significato cinematico della frequenza angolare ω può essere chiarito considerando un corpo che si muove di moto circolare uniforme, con velocità angolare ω (Fig. 3.13, a destra). La proiezione del moto circolare sull'asse x è un moto armonico descritto dalla (3.45). La frequenza angolare ω si misura pertanto in rad s^{-1} .

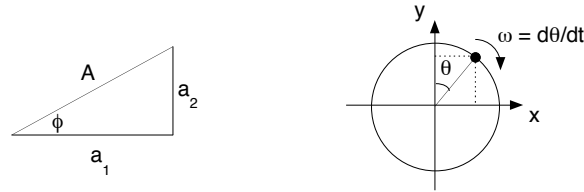


Figura 3.13: A sinistra: costruzione geometrica per passare dalla (3.44) alla (3.45). A destra: moto armonico come proiezione di un moto circolare uniforme.

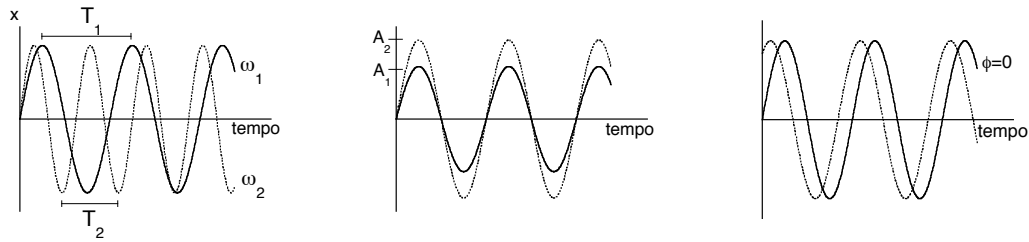


Figura 3.14: A sinistra: due oscillazioni con diversa frequenza angolare, $\omega_2 > \omega_1$. Al centro: due oscillazioni con diversa ampiezza. A destra: due oscillazioni con diversa fase iniziale.

Un significato più intuitivo ha la frequenza di oscillazione ν , che misura il numero di oscillazioni nell'unità di tempo, ed è legata alla frequenza angolare dalla relazione $\nu = \omega/2\pi$. La frequenza ν si misura in hertz ($1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$). La legge oraria del moto armonico (3.45) si può riscrivere in funzione della frequenza:

$$x(t) = A \sin(2\pi\nu t + \phi) . \tag{3.46}$$

Si chiama *periodo* del moto armonico semplice la durata temporale di una singola oscillazione (Fig. 3.14, a sinistra). Il periodo è legato alla frequenza dalla relazione $T = 1/\nu = 2\pi/\omega$. La legge oraria del moto armonico (3.45) si può riscrivere in funzione del periodo:

$$x(t) = A \sin(2\pi t/T + \phi) . \tag{3.47}$$

La frequenza angolare propria ω , e quindi la frequenza ν e il periodo T , sono univocamente determinati dall'equazione del moto (3.42).

3.7.4 Condizioni iniziali

Nella legge oraria (3.45), ampiezza A (Fig. 3.14, al centro) e fase iniziale ϕ (Fig. 3.14, a destra) *non* sono determinate dall'equazione del moto (3.42). Per determinarle è necessario conoscere posizione x e velocità $v = dx/dt$ ad un istante qualsiasi t_0 :

$$x(t_0) = A \sin(\omega t_0 + \phi) , \quad v(t_0) = A\omega \cos(\omega t_0 + \phi) . \tag{3.48}$$

In particolare, se si conoscono posizione x_0 e velocità v_0 all'istante $t_0 = 0$, è facile vedere dalle (3.48) che:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} , \quad \phi = \arctan \frac{\omega x_0}{v_0} . \tag{3.49}$$

3.7.5 Energia dell'oscillatore armonico

La forza che agisce sull'oscillatore armonico, $F = -k_e x = -m\omega^2 x$, è unidimensionale e dipende solo dalla posizione. Pertanto è una forza *conservativa*. L'energia potenziale (Fig. 3.15 a) è (a

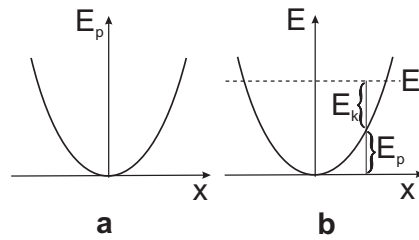


Figura 3.15: Energia di un oscillatore armonico

meno di una costante additiva, che in genere si pone uguale a zero):

$$E_p = - \int_0^x F(x') dx' = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 = \frac{1}{2} k x^2 . \quad (3.50)$$

L'energia totale dell'oscillatore armonico (Fig. 3.15 b), usando le (3.49), è

$$E_{\text{tot}} = E_p + E_k = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 + \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 \left(x^2 + \frac{v^2}{\omega^2} \right) = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 , \quad (3.51)$$

cioè dipende dalla frequenza e dall'ampiezza dell'oscillazione.

3.7.6 Applicazioni

Elenchiamo alcuni esempi di sistemi il cui comportamento è descritto dall'equazione dell'oscillatore armonico.

- Sistemi meccanici macroscopici, quali molle, pendoli, pendoli di torsione. Grazie alla stabilità del loro periodo di oscillazione, questi sistemi sono alla base del funzionamento di molti orologi meccanici.
- Circuiti elettrici oscillanti, in cui capacità e induttanza sostituiscono costante elastica e massa, rispettivamente.
- Dipoli elettrici oscillanti, che emettono onde elettromagnetiche.
- Atomi di un cristallo, oscillanti intorno alle posizioni di equilibrio di un reticolo geometrico.

L'importanza del moto armonico è accresciuta dal fatto che qualunque funzione periodica può essere espressa mediante una serie di termini armonici di diversa frequenza, opportunamente pesati (*sintesi di Fourier*).

3.8 Sistemi di punti materiali

Abbiamo fin qui considerato la dinamica di corpi singoli di dimensioni trascurabili, o al più le interazioni tra due corpi.

La trattazione può essere estesa a sistemi costituiti da molte particelle, ad esempio da molti atomi o molecole. Senza voler fare una trattazione sistematica, ricordiamo qui alcuni concetti fondamentali.

3.8.1 Centro di massa

Partiamo da un semplice esempio. Consideriamo due corpi, di masse m_1 e m_2 , collegati da un'asta rigida di massa trascurabile (Fig. 3.16, a sinistra). In quale punto dovremo appoggiare l'asta affinché i due corpi rimangano in equilibrio rispetto alla forza di gravità? Se indichiamo con r_1 e r_2 le distanze dei due corpi dal punto d'appoggio, è facile verificare (e si può dimostrare) che deve essere

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_2}{r_1}, \quad \text{cioè} \quad m_1 r_1 = m_2 r_2 . \quad (3.52)$$

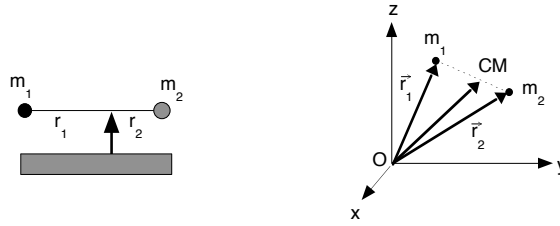


Figura 3.16: Centro di massa di un sistema di due punti materiali.

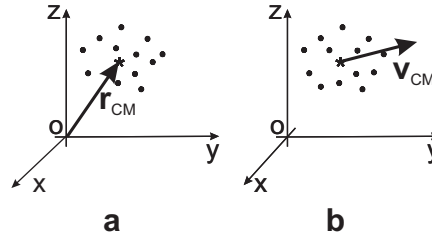


Figura 3.17: Sistema di particelle: (a) centro di massa; (b) velocità del centro di massa

Il punto così individuato viene chiamato *centro di massa* (CM), e, come vedremo, possiede importanti proprietà non solo dal punto di vista statico, ma anche dinamico.

Rispetto ad un sistema di coordinate cartesiane $Oxyz$, i due corpi sono individuati dai vettori posizione \vec{r}_1 e \vec{r}_2 (Fig. 3.16, a destra). Indichiamo con $M = m_1 + m_2$ la massa totale del sistema dei due corpi. La posizione del CM è individuata dal vettore posizione

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1}{M} \vec{r}_1 + \frac{m_2}{M} \vec{r}_2 = \frac{1}{M} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2), \quad (3.53)$$

cioè dalla somma vettoriale dei due vettori \vec{r}_1 e \vec{r}_2 , ciascuno pesato dalla relativa frazione di massa m_i/M .

Generalizziamo il concetto di centro di massa ad un sistema con un numero qualsiasi N di particelle. Indichiamo con \vec{r}_i il vettore posizione e con m_i la massa della i -ma particella. $M = \sum m_i$ è la massa totale del sistema. Il centro di massa (CM) del sistema (Fig. 3.17 a) è individuato dal vettore

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i, \quad \text{per cui} \quad M \vec{r}_{cm} = \sum_i m_i \vec{r}_i. \quad (3.54)$$

Derivando la (3.54) si ottiene la velocità del centro di massa:

$$\vec{v}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{v}_i, \quad \text{per cui} \quad M \vec{v}_{cm} = \sum_i m_i \vec{v}_i. \quad (3.55)$$

Derivando ulteriormente si ottiene l'accelerazione del centro di massa:

$$\vec{a}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{a}_i, \quad \text{per cui} \quad M \vec{a}_{cm} = \sum_i m_i \vec{a}_i. \quad (3.56)$$

3.8.2 Forze interne e forze esterne

Supponiamo di avere individuato un sistema di punti materiali. Su ogni punto del sistema possono agire forze di diversa origine. È utile fare la distinzione tra forze interne e forze esterne.

Le forze *interne* ad un sistema, \vec{F}_{int} , rappresentano le interazioni tra punti materiali appartenenti al sistema. Le forze *esterne*, \vec{F}_{ext} , rappresentano le interazioni tra punti materiali appartenenti al sistema e punti materiali esterni al sistema.

A titolo di esempio, consideriamo due punti materiali, di masse m_1 e m_2 , collegati da una molla e soggetti alla forza di gravità.

Su ognuno dei due punti materiali agiscono:

- una forza esterna, la forza di gravità $\vec{F}_i = m_i \vec{g}$;
- una forza interna, la forza elastica \vec{F}_{ij} ($ij = 12$ per uno dei due punti, $ij = 21$ per l'altro).

Le equazioni del moto dei due punti materiali sono:

$$m_1 \vec{a}_1 = \vec{F}_{12} + m_1 \vec{g} \quad (3.57)$$

$$m_2 \vec{a}_2 = \vec{F}_{21} + m_2 \vec{g} \quad (3.58)$$

Sommando le due equazioni e tenendo conto che $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ (per il terzo principio della dinamica), possiamo ottenere l'equazione del moto del centro di massa:

$$M \vec{a}_{cm} = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 = m_1 \vec{g} + m_2 \vec{g} = \left(\sum \vec{F}_{\text{ext}} \right)_i. \quad (3.59)$$

L'accelerazione del centro di massa dipende solo dalle forze esterne al sistema.

Questa conclusione può essere generalizzata al caso di un sistema composto da un numero qualunque di corpi. Per ogni particella del sistema possiamo distinguere l'azione delle forze interne e delle forze esterne:

$$m_i \vec{a}_i = \left(\sum \vec{F} \right)_i = \left(\sum \vec{F}_{\text{int}} \right)_i + \left(\sum \vec{F}_{\text{ext}} \right)_i. \quad (3.60)$$

È facile dimostrare, facendo sempre uso del terzo principio, che per l'intero sistema:

$$M \vec{a}_{cm} = \sum \vec{F}_{\text{ext}}. \quad (3.61)$$

L'accelerazione del *CM* dipende cioè sempre solo dalle forze esterne al sistema.

Generalizzando la definizione di quantità di moto di un unto materiale $\vec{p} = m\vec{v}$, si definisce il vettore quantità di moto totale \vec{P} di un sistema come

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i = M \vec{v}_{cm}. \quad (3.62)$$

La (3.61) si può pertanto riscrivere:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{ext}}. \quad (3.63)$$

Come conseguenza della (3.61) o della (3.63), se la risultante delle *forze esterne* applicate è nulla, l'accelerazione del *CM* è nulla e il vettore *quantità di moto totale* del sistema si conserva:

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_{cm} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = \text{cost}. \quad (3.64)$$

Appare quindi naturale descrivere la dinamica dei sistemi di particelle considerando separatamente

- il moto del Centro di Massa;
- il moto delle singole particelle relativo al Centro di Massa.

3.8.3 Energia di un sistema

Riprendiamo l'esempio di due corpi, su cui agiscono sia forze interne ($\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$) che forze esterne (\vec{F}_1 e \vec{F}_2). Si noti che le forze non dipendono dal sistema di riferimento scelto per descrivere il movimento.

L'energia cinetica del sistema è

$$E_k = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2. \quad (3.65)$$

L'energia cinetica (come le velocità) dipende dal sistema di riferimento.

Calcoliamo il lavoro infinitesimo delle forze per spostamenti infinitesimi dei due corpi, $d\vec{r}_1$ e $d\vec{r}_2$:

$$dW_1 = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_1 \quad (3.66)$$

$$dW_2 = \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 + \vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}_2 \quad (3.67)$$

Sommando le due equazioni si ottiene che il lavoro totale delle forze,

$$dW_{\text{tot}} = \underbrace{\vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2}_{\text{lavoro forze esterne}} + \underbrace{\vec{F}_{12} \cdot (d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2)}_{\text{lavoro forze interne}}, \quad (3.68)$$

può venire decomposto come somma del lavoro delle forze esterne W_{ext} e del lavoro delle forze interne W_{int} .

Generalizziamo ad un sistema con un numero qualsiasi N di corpi. L'energia cinetica totale del sistema è la somma delle energie cinetiche delle singole particelle, $E_k = \sum_i E_{k,i}$. La variazione dell'energia cinetica totale ΔE_k è uguale alla somma dei lavori svolti sulle singole particelle dalle forze agenti (interne ed esterne):

$$\Delta E_k = W_{\text{ext}} + W_{\text{int}}. \quad (3.69)$$

Energia interna

Vogliamo ora introdurre il concetto di energia interna, che verrà utilizzato estesamente nel prossimo capitolo, dedicato alla termodinamica.

Consideriamo prima le forze interne al sistema. Se le forze interne al sistema sono conservative, il loro lavoro può essere espresso in funzione della variazione di un'energia potenziale E_p :

$$W_{\text{int}} = -\Delta E_{p,\text{int}}. \quad (3.70)$$

Consideriamo ora l'energia cinetica del sistema. L'energia cinetica dipende dal sistema di riferimento usato per descrivere il movimento. In ogni caso, si dimostra che l'energia cinetica totale di un sistema può essere espressa come somma di due termini:

- energia cinetica del moto del Centro di Massa, $Mv_{\text{cm}}^2/2$, che descrive il moto traslazionale complessivo del sistema, e dipende dal sistema di riferimento;
- energia cinetica del moto delle singole particelle relativo al Centro di Massa, $E_{k,\text{cm}}$.

Si chiama *energia interna* di un sistema la somma dell'energia cinetica relativa al CM e dell'energia potenziale delle forze interne (se queste sono conservative).

$$U = E_{k,\text{cm}} + E_{p,\text{int}}. \quad (3.71)$$

Capitolo 4

Termodinamica

La Termodinamica è nata nel XVIII secolo per descrivere le trasformazioni di calore in lavoro nei primi motori termici, e si è poi sviluppata fino ad assumere un carattere di rilevanza per tutti i processi chimici e fisici. La scoperta della costituzione atomica della materia ha poi consentito di stabilire una connessione tra Termodinamica e Meccanica.

4.1 Sistemi costituiti da molte particelle

La materia è costituita di atomi, e molte proprietà fisiche dei sistemi macroscopici (quali la temperatura o la conducibilità elettrica) dipendono dal comportamento microscopico a livello atomico e talora sub-atomico.

4.1.1 Atomi e molecole

Come abbiamo già accennato al § 1.5, gli atomi hanno dimensioni di qualche decimo di nanometro ($1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$), e sono composti da un nucleo pesante con carica elettrica positiva e da una nube di elettroni con carica elettrica negativa. Il numero di elettroni determina le proprietà dell'atomo. In natura esistono 92 tipi diversi di atomi, che si differenziano per il diverso numero di elettroni: l'atomo più leggero, l'idrogeno (simbolo H) ha un solo elettrone, l'atomo più pesante, l'uranio (simbolo U) ne ha 92. Considereremo più in dettaglio la struttura interna degli atomi al § 5.1.

Due o più atomi possono unirsi per formare una *molecola*. Ad esempio, l'idrogeno si trova in natura sotto forma di molecola biatomica H-H, che simbolicamente viene indicata con H_2 . Anche l'ossigeno e l'azoto formano molecole biatomiche, il cui simbolo è rispettivamente O_2 e N_2 . Due atomi di idrogeno ed uno di ossigeno formano la molecola di acqua, H_2O . La molecola del metano è formata da un atomo di carbonio e 4 atomi di idrogeno, CH_4 .

Le molecole più semplici sono costituite da due atomi, le più complesse (tipicamente le molecole biologiche) possono comprendere qualche migliaio di atomi. Le dimensioni lineari delle molecole anche più grandi non superano comunque tipicamente i 10 nanometri.

4.1.2 Stati di aggregazione

Volumi macroscopici (dell'ordine al esempio del dm^3) contengono un numero molto elevato di atomi o molecole (più sotto daremo anche dei valori numerici). A questo livello di dimensioni della materia, si distinguono tre stati di aggregazione (Fig. 4.1).

1. *Stato gassoso*. Macroscopicamente un gas non ha né volume né forma propri. Da un punto di vista microscopico, un gas è formato da atomi o molecole molto distanti tra loro, quindi debolmente interagenti e liberi di muoversi.
2. *Stato liquido*. Macroscopicamente, un liquido è dotato di volume fisso, ma non ha forma propria. Da un punto di vista microscopico, gli atomi in un liquido sono vicini e quindi

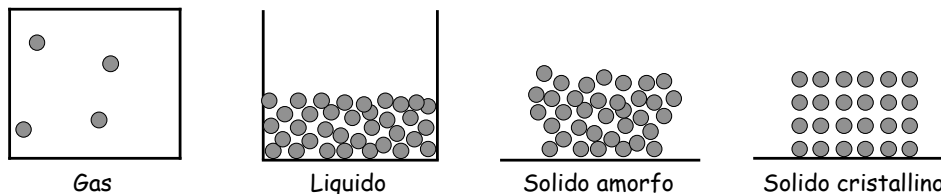


Figura 4.1: Rappresentazione schematica (non in scala) dei diversi stati di aggregazione della materia. Ogni pallino rappresenta un atomo; ovviamente il numero di atomi è nella realtà molto più grande, dell'ordine del numero di Avogadro, 6×10^{23} .

fortemente interagenti; non possono modificare in modo significativo le distanze reciproche, ma non sono vincolati a posizioni fisse.

3. *Stato solido*. Macroscopicamente un solido ha sia forma sia volume propri. Da un punto di vista microscopico, gli atomi sono vicini e vincolati a posizioni fisse.

- Nei *solidi cristallini* le posizioni atomiche sono geometricamente ordinate e formano reticoli regolari.
- Nei *solidi non cristallini* (o amorfi) la disposizione degli atomi è priva dell'ordine a lungo raggio tipico delle strutture cristalline.

4.1.3 Grandi numeri. Numero di Avogadro.

La connessione tra comportamento microscopico a livello atomico e proprietà macroscopiche risulta complicata dal fatto che il numero di atomi in gioco è estremamente elevato. Facciamo alcuni esempi:

Esempio 1: L'aria è un gas costituito per circa il 78% di molecole biatomiche di azoto, N_2 , il 21% di molecole biatomiche di ossigeno, O_2 , più tracce di altre molecole. 1 cm^3 di aria contiene complessivamente circa 2.7×10^{19} molecole, che si muovono con una velocità media di circa 500 m/s, e con un cammino libero medio, cioè una distanza media tra due urti consecutivi con altre molecole, dell'ordine di 10^{-7} m.

Esempio 2: 1 cm^3 di cloruro di sodio cristallino NaCl (il sale da cucina) contiene circa 4.4×10^{21} atomi. La distanza tra due atomi primi vicini è di 0.28×10^{-9} m.

Una grandezza fisica fondamentale per collegare le proprietà macroscopiche alla struttura microscopica della materia è il *numero di Avogadro* N_A , definito come il numero di atomi presenti in 12 grammi di carbonio (per essere più precisi, in 12 grammi dell'atomo di carbonio il cui nucleo contiene esattamente 12 particelle subnucleari, 6 protoni e 6 neutroni; si veda più avanti al § 5.1). Il valore misurato del numero di Avogadro è

$$N_A = 6.02214199(47) \times 10^{23} = (6.02214199 \pm 0.00000047) \times 10^{23}. \quad (4.1)$$

Nell'eq. (4.1) compare anche l'incertezza con cui è oggi conosciuto il numero di Avogadro. Sono mostrati due diversi modi con cui può venire espressa l'incertezza.

Una quantità di costituenti elementari qualsiasi (atomi, molecole, ioni, elettroni, etc.) corrispondente al numero di Avogadro è detta una *mole* (una mole di atomi, una mole di elettroni, etc.)

4.1.4 Approccio statistico

Il grande numero di particelle (atomi, molecole, etc) presenti in una quantità di materia macroscopicamente rilevante impedisce una trattazione semplice, basata sull'applicazione delle equazioni della dinamica ad ogni singola particella. Vengono invece utilizzati metodi statistici, per mezzo dei

quali si definiscono alcuni pochi parametri che sintetizzano le proprietà medie del comportamento microscopico (ad esempio la pressione o la temperatura, come vedremo di seguito). Grazie al numero estremamente elevato di particelle, tali valori medi risultano molto stabili, e possono essere considerati come grandezze costanti a livello macroscopico nonostante la grande mutevolezza della situazione microscopica.

La Termodinamica studia le peculiari proprietà dei sistemi macroscopici che dipendono dalla presenza di un numero estremamente elevato di costituenti elementari.

4.2 Energia interna

Consideriamo un sistema costituito da un grande numero ($N \simeq 10^{23}$) di atomi o molecole. Ci fissiamo nel sistema di riferimento solidale con il centro di massa. Supponiamo inoltre che le forze di interazione tra le particelle siano puramente conservative (ipotesi estremamente ragionevole, visto che si tratta di forze riconducibili, in modo più o meno complesso, all'interazione elettromagnetica). Come abbiamo visto al § 3.8, è possibile considerare una funzione *energia interna* U

$$U = E_{k,cm} + E_{p,int} , \quad (4.2)$$

definita come somma di due termini:

- Energia cinetica totale $E_{k,cm} = \sum m_i v_i^2 / 2$, pari alla somma delle energie cinetiche delle singole particelle calcolate nel riferimento del centro di massa.
- Energia potenziale delle forze interne al sistema $E_{p,int}$, pari alla somma delle energie potenziali relative alle interazioni tra tutte le particelle.

Nella realtà, il calcolo dell'energia interna è molto problematico, o addirittura impossibile, per la difficoltà di individuare tutte le possibili forme di interazione tra tutte le particelle del sistema e di trattarle in modo quantitativamente rigoroso. Solo in sistemi particolarmente semplici, nei quali è possibile trascurare le forze di interazione tra le particelle, l'energia interna si riduce al termine cinetico, ed è possibile una trattazione quantitativa rigorosa, ancorché di natura statistica.

Esempio 1: Un gas viene detto *ideale* se si possono trascurare sia le dimensioni delle molecole sia le interazioni tra le molecole. In tal caso, l'energia potenziale relativa alle forze interne è nulla, e l'energia interna è puramente cinetica. Gas reali sufficientemente rarefatti si comportano come gas ideali.

Esempio 2: Nei solidi e nei liquidi le interazioni tra atomi o molecole sono forti, e il contributo dell'energia potenziale all'energia interna non può essere trascurato.

Vedremo più avanti che, anche se il suo calcolo rigoroso non è in genere possibile, l'energia interna U gioca un ruolo chiave nella descrizione del comportamento termodinamico dei sistemi, in quanto, anche se non è possibile determinare il suo valore assoluto, sono comunque misurabili macroscopicamente le sue variazioni ΔU .

4.3 Pressione e temperatura

Il comportamento medio a scala atomica di un sistema composto da un numero molto elevato di atomi può venire riassunto da poche grandezze misurabili macroscopicamente. Per i sistemi più semplici sono sufficienti due grandezze, pressione e temperatura.

Per comprendere il significato fisico di pressione e temperatura, fissiamo per ora l'attenzione su un sistema particolarmente semplice: un gas ideale (in cui l'energia è solo cinetica) e monoatomico, cioè con molecole costituite da un solo atomo (per cui l'energia cinetica è puramente traslazionale, priva di contributi dovuta a rotazioni o vibrazioni molecolari).

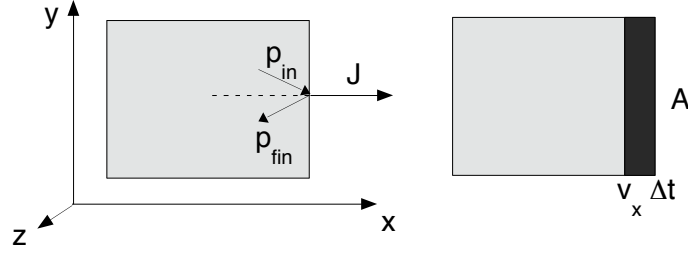


Figura 4.2: A sinistra: urto di una molecola con una parete del recipiente. A destra: volume $Av_x\Delta t$ contenente le molecole che urtano la parete in un intervallo di tempo Δt .

4.3.1 Gas ideale: urti degli atomi con le pareti del recipiente

Consideriamo un volume V di gas ideale monoatomico (ad esempio il gas elio, simbolo He). Studiamo dapprima il comportamento di un singolo atomo che urta elasticamente, cioè senza modificare la sua energia cinetica, la parete del recipiente (Fig. 4.2, a sinistra). La quantità di moto prima dell'urto è $\vec{P}_{in} = m\vec{v}_{in}$, dopo l'urto è $\vec{P}_{fin} = m\vec{v}_{fin}$. A seguito dell'urto, la componente della quantità di moto perpendicolare alla parete cambia di segno, le altre due componenti restano invariate. La variazione di quantità di moto lungo la direzione perpendicolare alla parete è perciò $\Delta P_x = -2mv_x$. A questa variazione della quantità di moto corrisponde, per il terzo Principio della dinamica, un impulso uguale e contrario esercitato sulla parete del recipiente, di modulo

$$J = 2mv_x. \quad (4.3)$$

In un intervallo di tempo Δt , N_u atomi urtano la parete, ciascuno imprimendo un impulso. All'impulso totale impresso dalle N_u molecole corrisponde una forza $F = J_{tot}/\Delta t$. Vogliamo calcolare la forza F ; per facilitare il calcolo, facciamo per ora l'ipotesi semplificatrice (anche se non realistica) che gli atomi abbiano tutti la stessa componente v_x di velocità. Si ha

$$F = \frac{J_{tot}}{\Delta t} = \frac{N_u(2mv_x)}{\Delta t}. \quad (4.4)$$

Calcoliamo il numero N_u di urti nell'intervallo di tempo Δt . Sia A l'area della parete. Agli urti contribuiscono solo le molecole che si trovano a distanza minore o uguale a $v_x\Delta t$ dalla parete, cioè nel volume $v_x\Delta t A$ (scuro in Fig. 4.2, a destra). Pertanto

$$N_u = v_x\Delta t A \frac{N}{V} \frac{1}{2}, \quad (4.5)$$

dove N/V è il numero di atomi per unità di volume, tipicamente dell'ordine di 10^{25} m^{-3} . Il fattore $1/2$ tiene conto del fatto che solo metà degli atomi ha componente v_x della velocità diretta verso la parete. La forza esercitata sulla parete è perciò

$$F = \frac{N}{V} mv_x^2 A. \quad (4.6)$$

Prendiamo ora in considerazione il fatto che gli atomi non hanno tutti la stessa velocità, e consideriamo il valor medio del quadrato della velocità $\langle v^2 \rangle$,

$$\langle v^2 \rangle = \frac{1}{N} (v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_N^2) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^2, \quad (4.7)$$

nonché i valori medi dei quadrati delle componenti lungo le tre direzioni x, y, z . Per motivi di simmetria, le medie lungo le tre direzioni sono uguali, per cui

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle = 3\langle v_x^2 \rangle \quad (4.8)$$

e quindi la forza media può essere espressa come

$$\langle F \rangle = \frac{1}{3} \frac{N}{V} m \langle v^2 \rangle A. \quad (4.9)$$

4.3.2 Gas ideale: pressione

In generale, la pressione esercitata su una superficie è definita come il rapporto tra la componente perpendicolare della forza e l'area della superficie.

Nel caso specifico del gas ideale, la pressione esercitata sulla parete del recipiente è

$$P = \frac{\langle F \rangle}{A} = \frac{1}{3} \frac{N}{V} m \langle v^2 \rangle. \quad (4.10)$$

Abbiamo così interpretato una grandezza macroscopica, la pressione, in termini di proprietà medie microscopiche del gas ideale.

L'unità di misura della pressione è il *pascal* (Pa), definito come la pressione esercitata dalla forza di 1 N sulla superficie di 1 m². Per molti usi pratici il pascal è un'unità di misura molto piccola, ed è necessario usare i suoi multipli. Ad un particolare multiplo del pascal si è dato un nome proprio, il bar: 1 bar = 10⁵ Pa. La pressione atmosferica media a livello del mare vale circa 1 bar (precisamente 1,013 bar).

4.3.3 Gas ideale: temperatura

In un gas ideale monoatomico, l'energia interna U è determinata unicamente dall'energia cinetica traslazionale degli atomi. La *temperatura* T (parametro macroscopico) di un gas ideale monoatomico è direttamente legata all'energia cinetica media degli atomi, e viene definita dalla relazione:

$$\langle E_{\text{tras}} \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T, \quad (4.11)$$

dove

- T è la *temperatura assoluta*, misurata in kelvin;
- k_B è la *costante di Boltzmann*: $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K.

La relazione (4.11) tra energia cinetica media (traslazionale) e temperatura nei gas ideali non dipende dal tipo di gas (cioè dalla massa): a parità di temperatura, atomi più pesanti hanno velocità media minore e viceversa.

Nei gas ideali molecolari, in cui l'unità base è una molecola composta da due o più atomi (ad esempio N₂, CO₂, etc.), l'energia cinetica di ogni molecola dipende non solo dal moto traslazionale del centro di massa, ma anche da rotazioni e vibrazioni delle molecole. La relazione (4.11) vale però ugualmente: la temperatura è sempre proporzionale all'energia cinetica media di traslazione del centro di massa delle molecole.

Nei gas reali (cioè, nella pratica, nei gas compressi), nei liquidi e nei solidi la relazione tra temperatura ed energia interna è molto più complessa che nei gas ideali, in quanto non si possono più trascurare i contributi delle diverse forme di energia potenziale. Anche per questi sistemi lo stato macroscopico è caratterizzato da un valore misurabile di temperatura (vedi più sotto), sebbene la temperatura non possa essere definita in modo semplice come per i gas ideali. È comunque lecito, dal punto di vista intuitivo, collegare qualitativamente la temperatura all'intensità del moto degli atomi o delle molecole; nel caso dei corpi solidi, si tratta del moto di agitazione degli atomi intorno a posizioni di equilibrio.

4.3.4 Equazione di stato dei gas ideali

Mettendo insieme le equazioni che definiscono pressione e temperatura in funzione della velocità quadratica media delle molecole, è possibile stabilire una relazione diretta tra pressione, volume e temperatura per un gas ideale:

$$P = \frac{1}{3} \frac{N}{V} m \langle v^2 \rangle = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \langle E_{\text{tras}} \rangle = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \frac{3}{2} k_B T, \quad (4.12)$$

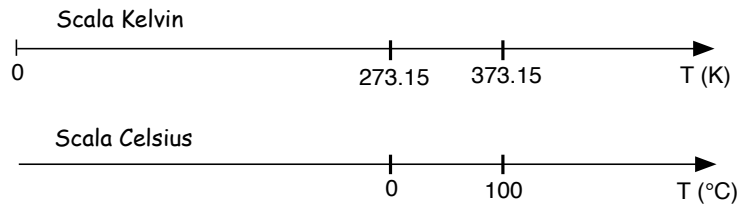


Figura 4.3: Confronto tra le scale Kelvin e Celsius per la misura della temperatura.

da cui, semplificando, si ricava l'equazione di stato

$$pV = N k_B T. \quad (4.13)$$

Si noti che N è il numero di molecole. L'equazione di stato si può esprimere in funzione del numero n di moli ($N = nN_A$), ponendo $Nk_B = nR$, dove $R = N_A k_B = 8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ è detta costante dei gas:

$$pV = nRT. \quad (4.14)$$

Dall'equazione di stato si può vedere che

- a temperatura T costante, volume V e pressione p sono inversamente proporzionali;
- a volume V costante, la pressione p è proporzionale alla temperatura assoluta T (scala Kelvin);
- a pressione p costante, il volume V è proporzionale alla temperatura assoluta T .

4.3.5 Termometri e scale di temperatura

Un gas molto rarefatto può con buona approssimazione essere considerato ideale. Se viene mantenuto fisso il volume, l'equazione di stato (4.14) si può esprimere come

$$p = \left(\frac{nR}{V} \right) T. \quad (4.15)$$

Poichè la grandezza tra parentesi è costante, l'equazione stabilisce una relazione di diretta proporzionalità tra temperatura e pressione. La misurazione della temperatura è quindi ricondotta alla misurazione della pressione di un gas a volume costante. Il dispositivo si chiama *termometro a gas ideale*.

La temperatura di un qualsiasi sistema diverso da un gas ideale può essere misurata mettendo il sistema a contatto con il termometro a gas, ed aspettando che si stabilisca l'equilibrio termico. In questo modo è operativamente definita la temperatura di un qualsiasi sistema.

Il termometro a gas è uno strumento preciso ma di uso complicato. Nella pratica si usano altri tipi di termometri, che vengono comunque tarati per confronto con il termometro a gas.

La *scala Kelvin* delle temperature, utilizzata nelle (4.11) e (4.15), fu introdotta prima che se ne trovasse il collegamento con l'energia cinetica delle molecole, e questo spiega la presenza del fattore $3k_B/2$ nella (4.11). Nella scala Kelvin si attribuisce il valore $T = 273.15 \text{ K}$ al punto di fusione dell'acqua, e il valore $T = 373.15$ al punto di ebollizione dell'acqua (Fig. 4.3, sopra). La scala Kelvin prevede solo valori non negativi di temperatura (è uno dei motivi per cui la scala è detta *assoluta*). Lo zero idealmente coincide con uno stato di pressione nulla del gas. In realtà, nessun gas può essere raffreddato fino allo zero della scala Kelvin, e quindi le temperature vicine allo zero non possono essere definite in termini di energia cinetica media delle molecole. In ogni caso, anche se si utilizzano definizioni più complete della temperatura, lo zero assoluto risulta irraggiungibile. Una scala di temperature utilizzata nella pratica molto più frequentemente della scala Kelvin è la *scala Celsius*, che ha come unità di misura il grado Celsius ($^{\circ}\text{C}$) e attribuisce il valore $T = 0^{\circ}\text{C}$

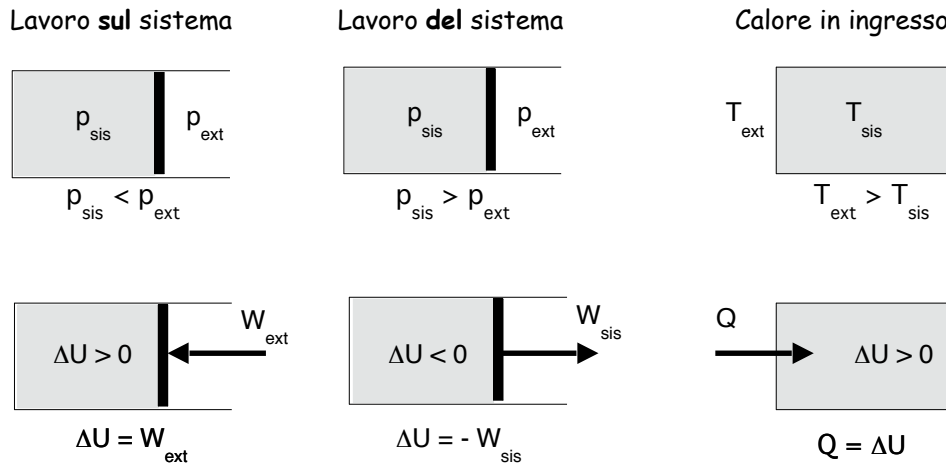


Figura 4.4: Scambio di energia tra un gas racchiuso in un cilindro e l'ambiente circostante. A sinistra e al centro: lavoro fatto rispettivamente sul sistema e dal sistema (il cilindro è chiuso da un pistone mobile). A destra: calore in ingresso al sistema (il cilindro è rigido).

al punto di fusione dell'acqua, e il valore $T = 100^\circ\text{C}$ al punto di ebollizione dell'acqua (Fig. 4.3, sotto). Il valore della temperatura sulla scala Celsius è dunque uguale al valore della temperatura sulla scala Kelvin meno 273,15. Entrambe le scale, Kelvin e Celsius, sono centigrade, in quanto dividono in 100 gradi l'intervallo tra fusione ed ebollizione dell'acqua.

4.4 Il Primo Principio della Termodinamica

4.4.1 Trasferimenti di energia: lavoro e calore

Come abbiamo visto più sopra, l'energia interna U di un sistema è definita come la somma delle energie cinetiche di tutti i componenti, calcolate rispetto al centro di massa, e di tutte le possibili forme di energia potenziale legate alle forze interne al sistema.

Un sistema termodinamico può modificare la sua energia interna scambiando energia con l'ambiente che lo circonda. È conveniente distinguere lo scambio di energia visto a livello microscopico e a livello macroscopico (convenzionalmente, useremo il termine "microscopico" per indicare un punto di vista a scala atomica).

- A livello *microscopico*, lo scambio di energia avviene sempre mediante interazioni tra atomi o molecole del sistema e atomi o molecole dell'ambiente circostante. Sono quindi in gioco forze microscopiche che svolgono lavoro microscopico su singoli atomi. Le forze che agiscono a livello atomico sono conservative.
- A livello *macroscopico*, è necessario distinguere due diverse forme di trasferimento di energia:
 - Il *lavoro* W corrisponde ad un trasferimento di energia macroscopicamente *ordinato*, che può essere espresso come il prodotto di una forza per uno spostamento macroscopico.
 - Il *calore* Q corrisponde ad un trasferimento di energia macroscopicamente *disordinato*, che non può essere descritto in termini di forze e spostamenti macroscopici.

Per chiarire meglio i concetti, facciamo riferimento ad un sistema particolarmente semplice, costituito da un gas racchiuso in un cilindro.

Lavoro

Supponiamo che il gas sia racchiuso in un cilindro munito di un pistone mobile di sezione A (Fig. 4.4, a sinistra). Le molecole del gas nel cilindro urtano il pistone dall'interno, esercitando una forza

media F ed una pressione $p_{\text{sis}} = F/A$. Se esercitiamo dall'esterno una pressione p_{ext} lievemente superiore alla pressione interna, il pistone si sposta verso l'interno, e noi facciamo un lavoro sul sistema $W_{\text{ext}} = F \Delta x$, dove Δx è lo spostamento del pistone. Il lavoro della forza esterna fa aumentare l'energia interna, $W_{\text{ext}} = \Delta U$.

È anche possibile che la pressione interna prevalga lievemente su quella esterna ($p_{\text{int}} > p_{\text{ext}}$, e il pistone si sposti verso l'esterno. In questo caso è il sistema che fa lavoro positivo W_{sis} sull'ambiente, a spese dell'energia interna: $W_{\text{sis}} = -\Delta U$ (Fig. 4.4, al centro).

Il lavoro termodinamico rappresenta quindi uno scambio di energia che corrisponde al movimento macroscopicamente ordinato di tutti gli atomi che costituiscono il pistone.

Un sistema scambia lavoro termodinamico con l'ambiente circostante quando c'è uno squilibrio di pressione tra sistema ed ambiente.

Calore

Consideriamo ora un gas racchiuso in un cilindro con pareti fisse, quindi senza la possibilità di scambiare lavoro meccanico macroscopico con l'ambiente circostante (Fig. 4.4, a destra). Supponiamo che la temperatura del gas T_{sis} e la temperatura dell'ambiente T_{ext} siano inizialmente diverse. È esperienza consolidata che, al passare del tempo, le due temperature tendono ad equalizzarsi, fino a raggiungere uno stato finale di *equilibrio termico*.

Abbiamo visto sopra che la temperatura, in un gas ideale, è legata all'energia cinetica media delle molecole. La modifica della temperatura comporta quindi una modifica dell'energia interna, che viene scambiata con l'ambiente circostante in una forma diversa dal lavoro macroscopicamente organizzato. Il flusso di energia che avviene attraverso urti molecolari privi di ordine macroscopico prende il nome di *calore*.

Un sistema scambia calore con l'ambiente circostante quando c'è uno squilibrio di temperatura tra sistema ed ambiente.

Unità di misura

Lavoro e calore sono due diverse forme di *energia in transito* tra diversi sistemi. Lavoro e calore quindi si misurano, come l'energia, in joule.

4.4.2 Bilancio energetico: Primo Principio

Per convenzione, legata allo sviluppo storico della termodinamica in connessione con lo studio dei motori termici, si considerano positivi il calore che entra in un sistema ed il lavoro che esce dal sistema. Il bilancio energetico di un sistema viene perciò espresso nel modo seguente:

$$Q = \Delta U + W. \quad (4.16)$$

Questa equazione sintetizza il Primo Principio della Termodinamica (Fig. 4.5, a sinistra).

Si noti che, mentre le forme di energia in transito, calore Q e lavoro W , possono essere misurate integralmente, l'energia interna compare solo sotto forma di variazione ΔU . Ciò è conforme al fatto che l'energia potenziale è sempre definita a meno di una costante additiva; inoltre l'energia interna contiene i contributi di tutte le possibili interazioni interne al sistema, indipendentemente dalla nostra capacità di conoscerle e di esprimerle sotto forma analitica.

Abbiamo sopra considerato, a scopo didattico, un sistema relativamente semplice costituito da un gas. Il Primo Principio si applica a qualsiasi sistema termodinamico, cioè a qualsiasi sistema costituito da un numero sufficientemente elevato (dell'ordine del numero di Avogadro) di componenti elementari.

4.4.3 Sistema isolato: conservazione dell'energia

Un sistema è isolato se non può scambiare né lavoro né calore con l'ambiente circostante (Fig. 4.5, a destra). In tal caso, poiché $W = 0$ e $Q = 0$, l'espressione del Primo Principio si riduce a

$$\Delta U = 0; \quad U = \text{costante}. \quad (4.17)$$

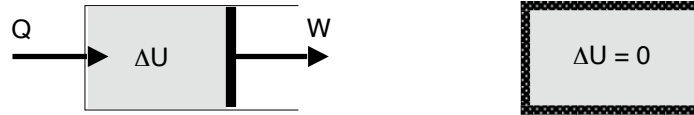


Figura 4.5: Bilancio energetico di un sistema non isolato (a sinistra) e di un sistema isolato (a destra).

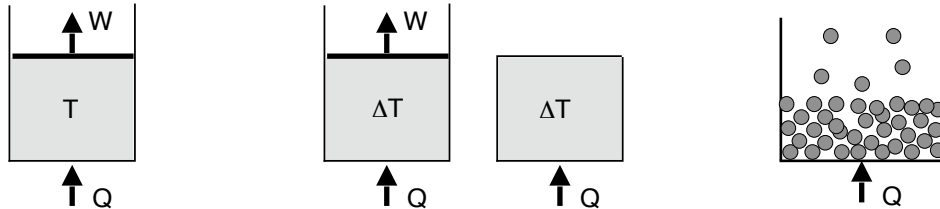


Figura 4.6: Assorbimento di calore: con produzione di lavoro senza variazione di temperatura e stato di aggregazione (a sinistra), con variazione di temperatura (al centro), con variazione dello stato di aggregazione (a destra).

In un sistema isolato, l'energia interna rimane costante.

Abbiamo già incontrato, in precedenza, la legge di conservazione dell'energia meccanica, conseguenza dei principi della dinamica. L'energia puramente meccanica si conserva solo se tutte le forze in gioco sono conservative (non dissipative). Il Primo Principio della Termodinamica tiene in conto tutte le possibili forme di energia, incluse quelle legate al moto disordinato di agitazione atomica e molecolare, e rappresenta quindi una legge di carattere generale.

Esempio: Si consideri un corpo di massa m appeso ad una molla di costante elastica k e immerso in un fluido, in un recipiente rigido e termicamente isolato. Se la molla viene posta in oscillazione, inizialmente immagazzinerà un'energia meccanica totale $mv^2/2 + kx^2/2$ (cinetica + potenziale elastica). Con il passare del tempo però l'energia meccanica progressivamente si riduce a zero, per effetto delle forze di attrito. L'energia interna totale del sistema isolato (molla + corpo + fluido) resta invece invariata. L'energia meccanica del moto macroscopico si è trasformata in energia diffusa nel moto disordinato molecolare.

4.5 Effetti del calore

Lo scambio di calore tra un sistema e l'ambiente circostante può avere vari effetti sul sistema. Per schematizzare, distinguiamo tre possibilità:

1. il calore viene trasformato integralmente in lavoro fatto dal sistema, senza modificare la temperatura del sistema, ad esempio nell'espansione isoterma di un gas ideale (Fig. 4.6, a sinistra);
2. il passaggio di calore provoca una variazione di temperatura senza alterare lo stato di aggregazione del sistema (Fig. 4.6, al centro);
3. il passaggio di calore provoca una variazione dello stato di aggregazione del sistema senza modificarne la temperatura (Fig. 4.6, a destra).

Approfondiremo il secondo ed il terzo fenomeno qui di seguito. Dedicheremo più avanti notevole attenzione al primo fenomeno, la trasformazione di calore in lavoro.

Va tenuto comunque presente che i tre fenomeni non si escludono necessariamente a vicenda.

Tabella 4.1: Calori specifici per unità di massa c e calori specifici molari \tilde{c} di alcune sostanze, liquide e solide, misurati a temperatura ambiente e a pressione costante.

Sostanza	c ($\text{JK}^{-1} \text{kg}^{-1}$)	\tilde{c} ($\text{JK}^{-1} \text{mol}^{-1}$)
Acqua (H_2O)	4186	76
Mercurio (Hg)	2000	36
Alluminio (Al)	907	24.5
Ferro (Fe)	446	24.9
Rame (Cu)	386	24.5
Piombo (Pb)	130	26.8

4.5.1 Calori specifici

Consideriamo il caso in cui il calore scambiato da un sistema provoca una variazione di temperatura, senza variazione dello stato di aggregazione. Il calore scambiato è legato alla variazione di temperatura dalla relazione

$$Q = C \Delta T, \quad (4.18)$$

dove C è la *capacità termica del sistema*, misurata in JK^{-1} .

La capacità termica di un sistema è proporzionale alla quantità di materia contenuta nel sistema stesso. La quantità di materia può essere misurata dalla massa m oppure dal numero di moli n (si ricordi che una mole contiene un numero $N_A \simeq 6 \times 10^{23}$ di costituenti elementari). Per tener conto della quantità di materia, il calore viene legato alla variazione di temperatura da una delle due relazioni, tra loro equivalenti:

$$Q = mc\Delta T = n\tilde{c}\Delta T, \quad (4.19)$$

dove c è il *calore specifico per unità di massa*, misurato in $\text{JK}^{-1} \text{kg}^{-1}$, mentre \tilde{c} è il *calore specifico molare*, misurato in $\text{JK}^{-1} \text{mol}^{-1}$. I calori specifici di alcune sostanze sono confrontati in Tabella 4.1.

I calori specifici dipendono:

- dalla sostanza;
- dal modo in cui il calore viene trasferito (ad esempio se il sistema rimane a volume costante oppure a pressione costante);
- dalla temperatura.

Lo studio dei calori specifici fornisce importanti informazioni sul comportamento della materia a livello atomico.

4.5.2 Calori latenti

Consideriamo ora il caso in cui il passaggio di calore provoca una variazione dello stato di aggregazione del sistema senza modificarne la temperatura.

Facciamo un esempio. Consideriamo un pezzo di ghiaccio (acqua solida) a pressione atmosferica e alla temperatura $T = -50^\circ\text{C}$. Se scaldiamo lentamente il ghiaccio, cioè gli forniamo calore, osserveremo un progressivo aumento di temperatura, fino ad arrivare a $T = 0^\circ\text{C}$. A questo punto la temperatura non aumenta più e il ghiaccio inizia a fondere, cioè l'acqua passa dallo stato solido allo stato liquido; durante questo processo il sistema assorbe comunque calore, che viene utilizzato per rompere alcuni legami chimici tra gli atomi o le molecole. Una volta completato il processo di fusione, il calore provoca ancora aumento di temperatura, fino a che l'acqua liquida raggiunge la temperatura di $T = 100^\circ\text{C}$. A questo punto si verifica un nuovo passaggio, dallo stato liquido allo stato gassoso (evaporazione), senza variazione di temperatura ma con assorbimento di calore, che viene utilizzato per rompere tutti i legami tra le molecole di acqua H_2O . Quando tutto il liquido è evaporato, riprende l'aumento di temperatura.

Tabella 4.2: Temperature di fusione ed evaporazione e corrispondenti calori latenti di alcune sostanze a pressione atmosferica.

	Fusione		Evaporazione	
	T ($^{\circ}\text{C}$)	C_{ℓ} (10^4 J/kg)	T ($^{\circ}\text{C}$)	C_{ℓ} (10^4 J/kg)
Acqua	0	33.5	100	226
Alcool etilico	-114.4	10.8	78.3	85.5
Azoto (N_2)	-210	2.6	-195.8	20
Mercurio (Hg)	-38.9	1.14	356.6	29.6
Oro (Au)	1063	6.28	2808	172

Tabella 4.3: Coefficiente di espansione termica di volume di alcune sostanze (alla temperatura ambiente).

Sostanza	β (10^{-6} K^{-1})
Acqua	207
Alcool etilico	1120
Mercurio	182
Ferro	36
Vetro pirex	10

Il calore necessario per un passaggio di stato è proporzionale alla massa della sostanza che subisce il passaggio e ad un coefficiente, detto calore latente C_{ℓ} , che dipende dalla sostanza e dalla pressione a cui avviene il passaggio di stato:

$$Q = m C_{\ell}. \quad (4.20)$$

I calori latenti di fusione e di evaporazione di alcune sostanze sono elencati in Tab. 4.2.

4.5.3 Dilatazione termica

Un effetto molto importante del riscaldamento di un corpo è la dilatazione termica: un corpo mantenuto a pressione costante modifica il suo volume quando ne viene variata la temperatura. In genere l'espansione è positiva quando la temperatura cresce.

Per un gas ideale mantenuto a pressione costante, il volume è proporzionale alla temperatura:

$$V = \left(\frac{nR}{p} \right) T. \quad (4.21)$$

Per i liquidi e i solidi in generale si ha che la variazione di volume ΔV è proporzionale al volume e alla variazione di temperatura:

$$\Delta V = \beta V \Delta T, \quad (4.22)$$

dove il coefficiente β è detto *coefficiente di dilatazione termica di volume*, e si misura in K^{-1} . Per gran parte delle sostanze β è positivo (i corpi si dilatano al crescere della temperatura). L'espansione termica è alla base di molti strumenti per la misurazione della temperatura, come il comune termometro a mercurio.

A livello microscopico, l'espansione termica è dovuta essenzialmente al fatto che al crescere della temperatura cresce l'intensità del moto di agitazione termica, e gli atomi tendono in media ad allontanarsi gli uni dagli altri.

4.6 Equilibrio e processi termodinamici

Una volta chiarito, con il Primo Principio della Termodinamica, il problema del bilancio energetico dei sistemi composti da un numero molto elevato di componenti elementari, vogliamo ora approfondire le modalità con cui avvengono le trasformazioni nei sistemi termodinamici.

Per far ciò, dobbiamo prima stabilire le *condizioni di equilibrio*, cioè le condizioni nelle quali un sistema termodinamico permane indefinitamente se non è perturbato da cause esterne.

4.6.1 Equilibrio termodinamico

Per *equilibrio termodinamico* si intende la contemporanea realizzazione di tre forme di equilibrio:

- *Equilibrio meccanico*, cioè equilibrio rispetto alle forze in grado di modificare le coordinate termodinamiche del sistema. Ad esempio, un gas contenuto in un cilindro con pistone è in equilibrio meccanico quando la pressione interna è omogenea ed è uguale alla pressione esterna.
- *Equilibrio termico*, cioè equilibrio rispetto al trasferimento di calore. Ad esempio, un corpo è in equilibrio termico se non esistono differenze di temperatura tra le sue parti e se la sua temperatura è uguale a quella dell'ambiente circostante.
- *Equilibrio chimico*, cioè equilibrio rispetto alle reazioni chimiche ed al trasporto di materia. Ad esempio, una miscela di gas diversi è in equilibrio chimico quando le diverse molecole sono distribuite omogeneamente nel volume a disposizione, cioè quando non esistono differenze di concentrazione tra le diverse parti del sistema. Un altro esempio è fornito dalla reazione chimica $A + B \leftrightarrow C + D$: l'equilibrio chimico si ha quando le quantità dei componenti A, B, C, D non cambiano nel tempo.

Da un punto di vista microscopico, sono inevitabili le *fluttuazioni* rispetto all'equilibrio, ad esempio variazioni locali temporanee di pressione, temperatura, concentrazione. L'equilibrio termodinamico è necessariamente *stabile*, perché il sistema può rimanere in equilibrio solo se le fluttuazioni (inevitabili) si smorzano da sole.

4.6.2 Processi termodinamici

L'interesse fondamentale della Termodinamica sta nello studio delle trasformazioni. Una trasformazione è un processo che porta un sistema da uno stato iniziale di equilibrio ad un nuovo stato di equilibrio, diverso dal precedente. La trasformazione è generalmente innescata da qualche agente esterno, che fa uscire il sistema dal suo stato di equilibrio iniziale. Facciamo alcuni esempi:

- Un gas è contenuto in un cilindro munito di pistone, alla pressione di 2 bar. Il pistone è inizialmente bloccato da uno spinotto e il gas è in equilibrio. Lo spinotto viene tolto, ed il pistone si sposta verso l'esterno contro la pressione atmosferica, oscillando intorno alla nuova posizione di equilibrio, finché l'attrito non smorza completamente le oscillazioni. Possiamo parlare di trasformazione dell'energia interna in calore (dissipazione di energia).
- Un gas contenuto in un cilindro verticale munito di pistone viene riscaldato e si espande lentamente, sollevando un corpo appoggiato sul pistone. Globalmente si è trasformato calore in lavoro meccanico.
- Si apre il rubinetto di una bombola di gas. Il gas esce dalla bombola e si disperde nell'aria.
- Un corpo alla temperatura di 100°C viene immerso in un bagno d'acqua a 20°C . Calore fluisce dal corpo all'acqua finché si ristabilisce l'equilibrio termico.

Un sistema subisce una trasformazione quando modifica il suo stato termodinamico; di conseguenza cambiano i valori delle coordinate termodinamiche. Indichiamo con i ed f gli stati di equilibrio

iniziale e finale della trasformazione. Gli stati intermedi di una trasformazione sono stati di non equilibrio, e quindi non descrivibili mediante valori ben definiti delle coordinate termodinamiche. Talora la deviazione dall'equilibrio degli stati intermedi di una trasformazione è così piccola da poter essere trascurata, ad esempio perché gli squilibri di pressione, di temperatura o di concentrazione sono estremamente piccoli. La trasformazione è detta in questo caso *quasi-statica*. Una trasformazione quasi-statica può quindi essere considerata con buona approssimazione una successione di stati di equilibrio.

4.6.3 Processi reversibili e irreversibili

Particolarmente importante è, in termodinamica, la distinzione tra processi reversibili e processi irreversibili. Si noti che il significato di “reversibilità” in fisica non coincide con quello del linguaggio comune.

Nella dinamica classica dei punti materiali (Capitolo 3), il concetto di reversibilità è connesso con l'invarianza delle equazioni del moto rispetto all'inversione del tempo. Se proiettiamo a rovescio il filmato dell'interazione tra due molecole di un gas o del moto della Terra intorno al Sole, non notiamo nulla di innaturale. Anche il filmato della collisione tra due palle da biliardo, se perfettamente elastica, può essere proiettato a rovescio senza problemi.

Se invece consideriamo i rimbalzi di una palla di gomma sul pavimento, l'attrito dovuto alla deformazione della palla provoca una consistente dissipazione dell'energia meccanica. La presenza di forze dissipative, e quindi lo sviluppo di calore, rende il processo irreversibile: un filmato proiettato a rovescio è chiaramente irrealistico.

In Termodinamica il concetto di reversibilità richiede una definizione precisa.

Consideriamo un sistema termodinamico che subisce una trasformazione da uno stato iniziale i_s ad uno stato finale f_s (l'indice s sta per “sistema”). Durante la trasformazione, il sistema può interagire con altri sistemi circostanti, che per comodità chiameremo collettivamente ambiente. Pertanto anche l'ambiente subisce generalmente una trasformazione da uno stato iniziale i_a ad uno stato finale f_a (l'indice a sta per “ambiente”). Se il sistema non interagisce in alcun modo con il suo ambiente, si avrà $f_a = i_a$.

Una trasformazione termodinamica $i_s \rightarrow f_s$ di un sistema è detta *reversibile* se è possibile riportare il sistema allo stato iniziale i_s ripristinando contemporaneamente anche l'ambiente al suo stato iniziale i_a .

Una trasformazione termodinamica è reversibile se contemporaneamente:

- è quasi-statica, cioè tale che il sistema si discosta solo in modo infinitesimo da stati di equilibrio,
- non è accompagnata da effetti dissipativi (attriti).

Nella realtà, tutte le trasformazioni reali sono in qualche misura irreversibili, e il concetto di reversibilità è un concetto limite. Talune trasformazioni reali possono comunque essere considerate con buona approssimazione reversibili.

4.6.4 Macchine termiche cicliche

La termodinamica si occupa di un numero molto grande di possibili tipi di sistemi termodinamici e di possibili tipi di trasformazioni. Particolarmente importanti, dal punto di vista sia concettuale che tecnologico, sono le trasformazioni cicliche, cioè le trasformazioni che riportano un sistema periodicamente nello stesso stato di equilibrio. In particolare, ci occuperemo qui delle trasformazioni cicliche delle macchine termiche, motori e frigoriferi, che si basano su sequenze cicliche di espansioni e compressioni di un fluido opportuno.

Lo studio delle macchine termiche cicliche ha portato storicamente all'enunciazione di principi della termodinamica. È stato poi possibile verificare che i principi, ottenuti dallo studio di sistemi particolari, hanno in realtà validità generale, e si applicano a qualsiasi tipo di sistema e di trasformazione.

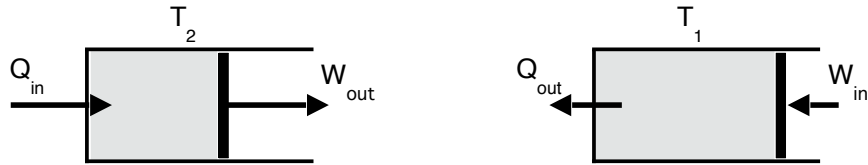


Figura 4.7: Espansione a temperatura costante T_2 (a sinistra) e compressione a temperatura costante $T_1 < T_2$ (a sinistra).

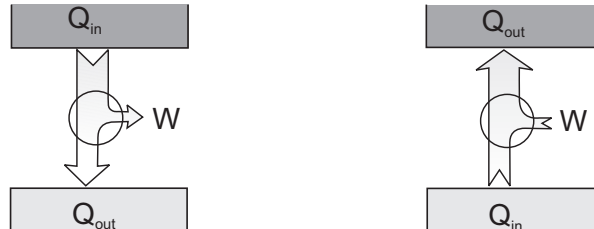


Figura 4.8: Rappresentazione schematica del bilancio energetico di un motore termico ciclico (a sinistra) e di un frigorifero (a destra).

Motori termici

Un motore termico è un dispositivo in grado di trasformare calore Q in lavoro meccanico W .

Un dispositivo molto semplice si può realizzare mediante un cilindro contenente gas ideale, chiuso da un pistone e mantenuto a temperatura costante. Se viene fornito calore Q_{in} dall'esterno, il pistone viene spinto verso l'esterno e si ottiene un lavoro $W_{\text{out}} = Q_{\text{in}}$ (Fig. 4.7, a sinistra); l'energia interna non cambia, perché il gas ideale è mantenuto a temperatura costante ($\Delta U = Q - W = 0$). Naturalmente si tratta di un dispositivo poco pratico, perché l'escursione del pistone è necessariamente limitata. Per avere un motore realmente utile, è necessario che il pistone ritorni periodicamente alla posizione di partenza, cioè che il dispositivo sia ciclico. Ovviamente si potrebbe semplicemente invertire la trasformazione precedente, ma così il lavoro netto fatto sull'esterno si ridurrebbe a zero. Un'alternativa efficiente consiste nell'immergere il cilindro in un bagno termico a temperatura inferiore, causando un flusso di calore in uscita $Q_{\text{out}} < 0$, cui corrisponde un lavoro in ingresso $W_{\text{in}} = Q_{\text{out}}$ (Fig. 4.7, a destra). Si può dimostrare che in questo modo si ottiene un lavoro netto positivo $W = W_{\text{out}} - W_{\text{in}}$.

Un *motore termico ciclico* trasforma calore in lavoro facendo subire ad una sostanza (generalmente un fluido) una trasformazione termodinamica ciclica. Durante ogni ciclo, un motore termico (Fig. 4.8, a sinistra):

- assorbe calore Q_{in} da uno o più serbatoi ad alta temperatura;
- produce lavoro meccanico W ;
- cede calore Q_{out} ad uno o più serbatoi a bassa temperatura.

Per il Primo Principio della Termodinamica, poiché al termine di ogni ciclo l'energia interna assume lo stesso valore, cioè $\Delta U = 0$,

$$|W| = |Q_{\text{in}}| - |Q_{\text{out}}| > 0. \quad (4.23)$$

Il *rendimento* di un motore termico è così definito:

$$\eta = \frac{|W|}{|Q_{\text{in}}|} = \frac{|Q_{\text{in}}| - |Q_{\text{out}}|}{|Q_{\text{in}}|} = 1 - \frac{|Q_{\text{out}}|}{|Q_{\text{in}}|}. \quad (4.24)$$

Macchine frigorifere

Una *macchina frigorifera ciclica* è un dispositivo in grado di asportare calore da un sistema facendo subire ad una sostanza (generalmente un fluido) una trasformazione termodinamica ciclica. Durante ogni ciclo, un frigorifero (Fig. 4.8, a destra):

- a) assorbe calore Q_{in} dal sistema che si vuole raffreddare;
- b) assorbe lavoro W da una sorgente esterna (tipicamente lavoro elettrico);
- c) cede calore Q_{out} ad uno o più serbatoi ad alta temperatura.

Per il Primo Principio della Termodinamica, poiché in un ciclo $\Delta U = 0$,

$$|W| = |Q_{\text{out}}| - |Q_{\text{in}}|. \quad (4.25)$$

L'efficienza di una macchina frigorifera è così definita:

$$\omega = \frac{|Q_{\text{in}}|}{|W|} = \frac{|Q_{\text{in}}|}{|Q_{\text{out}}| - |Q_{\text{in}}|}. \quad (4.26)$$

4.7 Il Secondo Principio della Termodinamica

Il Secondo Principio della Termodinamica codifica l'esperienza fatta in relazione all'irreversibilità dei processi termodinamici naturali, e pone dei limiti alle trasformazioni di energia. Il Secondo Principio è stato enunciato in due modi diversi da Kelvin e da Clausius nella seconda metà dell'800.

Secondo Principio: enunciato di Kelvin

Non è possibile realizzare una trasformazione ciclica il cui unico risultato sia la trasformazione in lavoro di calore prelevato da un unico serbatoio.

L'enunciato di Kelvin stabilisce l'impossibilità di realizzare un motore termico con rendimento $\eta = 1$ (cioè con $Q_{\text{out}} = 0$). Il rendimento di qualsiasi motore termico reale è $\eta < 1$.

Secondo Principio: enunciato di Clausius

Non è possibile realizzare una trasformazione ciclica il cui unico risultato sia il trasferimento di calore da un sistema ad una determinata temperatura ad un altro sistema a temperatura superiore.

L'enunciato di Clausius stabilisce l'impossibilità di realizzare una macchina frigorifera che non assorba lavoro da fonti esterne (cioè con $W = 0$). L'efficienza ω è sempre un numero finito.

È facile dimostrare la perfetta equivalenza dei due enunciati di Kelvin e di Clausius. La dimostrazione si fa "per assurdo": supponendo che uno dei due enunciati sia falso, si vede che deve necessariamente essere falso anche l'altro, e viceversa. Pertanto, se un enunciato è vero, deve essere vero anche l'altro.

4.7.1 Irreversibilità dei processi naturali

È sempre possibile trasformare integralmente lavoro in calore ceduto ad un unico serbatoio (ad esempio dissipando lavoro per attrito). L'enunciato di Kelvin stabilisce che la dissipazione di lavoro in calore è un processo *irreversibile*.

Il calore fluisce spontaneamente da un corpo ad una data temperatura ad un corpo a temperatura inferiore. L'enunciato di Clausius stabilisce che il flusso di calore da un corpo caldo a un corpo freddo è un processo *irreversibile*.

Un'analisi dettagliata (che qui omettiamo, ma può essere trovata in testi più avanzati) porta a concludere che, come conseguenza del Secondo Principio, *tutti i fenomeni che avvengono spontaneamente in natura sono irreversibili*.

4.7.2 Teorema di Carnot

Torniamo ora a considerare i motori termici. Un problema tecnologico molto importante è determinare le condizioni per le quali un motore termico ha il massimo rendimento $\eta = W_{\text{out}}/Q_{\text{in}}$. Il rendimento di un motore termico reale dipende da molti fattori: è importante ad esempio conoscere la natura del fluido che subisce il ciclo termico, a quali temperature il calore viene assorbito e ceduto, nonché l'influenza degli attriti.

È possibile ottenere un importante risultato se ci si limita a considerare motori termici che lavorano tra due soli serbatoi, cioè che

- assorbono calore Q_{in} da un solo serbatoio a temperatura costante T_{in} ,
- cedono calore Q_{out} ad un solo serbatoio a temperatura costante T_{out} (con $T_{\text{out}} < T_{\text{in}}$).

In questa situazione, come conseguenza del Secondo Principio si può dimostrare (Teorema di Carnot) che, una volta stabilite le temperature T_{in} e T_{out} dei due serbatoi:

- a) tutti i motori che operano reversibilmente (cioè in modo quasi-statico e senza attriti) hanno lo stesso rendimento;
- b) i motori che operano reversibilmente hanno rendimento maggiore di quelli che operano in modo non reversibile (cioè con salti finiti di temperatura e/o pressione e in presenza di attriti);
- c) il rendimento dei motori reversibili dipende solo dalle temperature assolute dei due serbatoi:

$$\eta_{\text{rev}} = 1 - \frac{|Q_{\text{out}}|}{|Q_{\text{in}}|} = 1 - \frac{T_{\text{out}}}{T_{\text{in}}}. \quad (4.27)$$

Poiché il rendimento di un qualsiasi motore che opera tra due sole temperature non può superare il rendimento di un motore reversibile, la (4.27) rappresenta il limite superiore teorico del rendimento in funzione delle temperature T_{in} e T_{out} . Nella pratica in genere T_{out} è la temperatura ambiente. Per aumentare il rendimento di un motore, oltre ovviamente a ridurre gli attriti e le differenze finite di temperatura e/o pressione (per renderlo il più possibile vicino al comportamento reversibile), è necessario aumentare la temperatura T_{in} della sorgente calda.

4.7.3 Temperatura termodinamica assoluta

La (4.27) stabilisce un rapporto di proporzionalità tra il calore scambiato reversibilmente da un motore termico e le temperature assolute dei due serbatoi:

$$\frac{|Q_{\text{out}}|}{|Q_{\text{in}}|} = \frac{T_{\text{out}}}{T_{\text{in}}}. \quad (4.28)$$

Finora abbiamo considerato la temperatura con riferimento al termometro a gas ideale, misurata quindi tramite la relazione $p = (nR/V)T$. Come abbiamo già osservato, il termometro a gas consente di definire operativamente la temperatura in un intervallo limitato di valori. Il termometro a gas non può essere utilizzato né a temperature troppo basse (tipicamente al di sotto di 0.5 K), perchè qualsiasi gas, per quanto rarefatto, liquefa, né a temperature troppo elevate, in quanto ad alte temperature le collisioni tra le molecole dei gas ne provocano la ionizzazione.

La (4.27) consente di introdurre una nuova definizione operativa di temperatura, la *temperatura termodinamica assoluta*, indipendente dalla sostanza termometrica ed applicabile in qualsiasi intervallo di valori. Secondo la (4.27), il rapporto tra due qualsiasi temperature corrisponde al rapporto tra le quantità di calore scambiate da un ciclo termico reversibile che opera tra quelle due temperature. La temperatura termodinamica così definita corrisponde alla temperatura del termometro a gas ideale nell'intervallo di temperature in cui quest'ultimo è operativo. È bene tener presente che il ciclo termico utilizzato per definire la temperatura termodinamica non va necessariamente inteso come un motore convenzionale. Ad esempio, a temperature molto basse (tra 1 e 0.001 K) si considerano cicli termici reversibili in cui il lavoro prodotto non è lavoro meccanico, bensì lavoro di magnetizzazione di un opportuno sale paramagnetico.

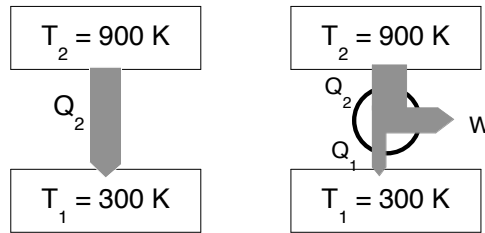


Figura 4.9: A sinistra: trasferimento irreversibile di calore tra due serbatoi. A destra: i due serbatoi sono collegati mediante un motore ciclico reversibile.

4.8 Entropia

I due enunciati di Kelvin e di Clausius del Secondo Principio sanciscono l'irreversibilità di due processi particolari, la trasformazione integrale di lavoro in calore e la trasmissione di calore da un corpo caldo ad uno freddo. Come abbiamo già osservato, è possibile mostrare che tutti i fenomeni che avvengono spontaneamente in natura sono in qualche misura irreversibili.

Trasformazioni perfettamente reversibili, naturali o indotte artificialmente, sono nella pratica impossibili, in quanto richiederebbero l'assenza totale di attriti e di differenze finite di pressione e temperatura. Le trasformazioni reversibili, seppure concepibili solo come trasformazioni limite, sono comunque un potente strumento concettuale.

4.8.1 Reversibilità e irreversibilità

Per cercare di comprendere il significato e le conseguenze dell'irreversibilità, incominciamo prendendo in considerazione due esempi significativi.

Esempio 1: Consideriamo due serbatoi termici, cioè due corpi di dimensioni sufficientemente grandi da poter considerare costante la loro temperatura anche quando scambiano calore. Supponiamo che le temperature dei due serbatoi siano rispettivamente $T_2 = 900$ K e $T_1 = 300$ K. Eseguiamo ora due distinti esperimenti, entrambi basati sul prelievo di una medesima quantità di calore dal serbatoio più caldo (Fig. 4.9).

- I due serbatoi sono posti a contatto diretto per un breve tempo, e la quantità di calore $|Q_2| = 90$ J fluisce dal serbatoio a $T_2 = 900$ K verso quello a $T_1 = 300$ K (Fig. 4.9, a sinistra). Il processo è completamente irreversibile. Non è possibile ripristinare la situazione iniziale, cioè ritrasferire il calore dal serbatoio a $T_1 = 300$ K verso quello a $T_2 = 900$ K, senza l'intervento di agenti esterni.
- I due serbatoi sono collegati per mezzo di un motore (ideale) perfettamente reversibile, che assorbe la stessa quantità di calore $|Q_2| = 90$ J dal serbatoio a $T_2 = 900$ K. Il motore trasforma parzialmente il calore $|Q_2|$ in lavoro $|W_{\text{out}}|$, e scarica nel serbatoio a $T_1 = 300$ K una quantità di calore $|Q_1|$ (Fig. 4.9, a destra). Abbiamo visto che per un motore perfettamente reversibile che lavora tra due sole temperature il rendimento è $\eta = 1 - T_1/T_2$; è facile pertanto calcolare che $|W_{\text{out}}| = 60$ J e $|Q_1| = 30$ J. Il processo, per ipotesi reversibile, può essere rovesciato, ripristinando la situazione iniziale senza l'intervento di agenti esterni.

Nell'esperimento (b), perfettamente reversibile, si è prodotto il massimo possibile di lavoro, pari a 60 J. Nell'esperimento (a), completamente irreversibile, la stessa quantità di calore 90 J è stata trasferita senza produrre alcun lavoro: l'energia che avrebbe potuto essere utilizzata per produrre lavoro è stata completamente dissipata.

Esempio 2: Consideriamo ora un cilindro, diviso in due parti di ugual volume $V_1 = 1$ dm³. Una parte del cilindro contiene $n = 0.1$ mol di gas ideale, in equilibrio con l'ambiente circostante alla temperatura $T_0 = 300$ K. L'altra parte è vuota. È facile calcolare, applicando l'equazione

di stato dei gas ideali, $pV = nRT$, che la pressione iniziale del gas è $p_1 \simeq 2.5$ bar (si ricordi che la costante dei gas vale $R=8.31 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$). Anche in questo caso eseguiamo due distinti esperimenti, il cui risultato è l'espansione del gas all'intero volume $2V_1$ del cilindro (Fig. 4.10).

- a) La parete che separa le due parti del cilindro viene forata. Il gas si espande contro il vuoto fino ad occupare l'intero volume $V_2 = 2V_1$ (Fig. 4.10, a sinistra). Questo tipo di trasformazione si chiama "espansione libera". Durante l'espansione, se il gas è ideale si verifica sperimentalmente che non c'è variazione di temperatura: la temperatura finale resta quella ambientale $T_0 = 300 \text{ K}$. È facile calcolare che la pressione finale è $p_2 = p_1/2$.

Consideriamo il bilancio energetico: poiché non varia la temperatura T_0 , l'energia interna del gas ideale rimane invariata, $\Delta U = 0$; il gas, espandendosi contro il vuoto, non fa alcun lavoro, $W = 0$; pertanto, per il Primo Principio, non c'è neppure scambio di calore, $Q = \Delta U + W = 0$.

Il processo di espansione libera del gas è completamente irreversibile: non è possibile ripristinare la situazione iniziale, cioè riconcentrare il gas nel volume iniziale, senza l'intervento di agenti esterni.

- b) Facciamo ora invece avvenire l'espansione del gas in modo reversibile. Allo scopo, è necessario evitare gli squilibri finiti di temperatura e pressione. Sostituiamo con un pistone scorrevole la parete che divide in due parti il cilindro, e applichiamo all'esterno del pistone una pressione che si adegui progressivamente alla pressione interna (Fig. 4.10, a destra). Poiché la temperatura è vincolata al valore ambientale T_0 , lo stato finale del gas è ancora caratterizzato da $V_2 = 2V_1$ e $p_2 = p_1/2$.

Consideriamo ora il bilancio energetico. Uno spostamento infinitesimo del pistone corrisponde ad una variazione dV del volume e ad un lavoro infinitesimo $dW = p dV$. Lo spostamento finito dal volume iniziale V_1 al volume finale V_2 corrisponde ad un lavoro fatto dal gas sull'ambiente esterno

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT_0}{V} dV = nRT_0 \ln \frac{V_2}{V_1} = nRT_0 \ln 2 = 172.8 \text{ J}. \quad (4.29)$$

Poiché non varia la temperatura, e quindi non varia l'energia interna del gas ideale, per il Primo Principio $Q = W$: il gas assorbe dall'ambiente una quantità di calore pari al lavoro svolto sull'esterno.

Il processo, per ipotesi reversibile, può essere rovesciato, ripristinando la situazione iniziale senza l'intervento di agenti esterni.

Nell'esperimento (b), perfettamente reversibile, si è prodotto il massimo possibile di lavoro. Nell'esperimento (a), completamente irreversibile, la medesima espansione del gas è avvenuta senza essere sfruttata per produrre conversione di calore in lavoro.

Nota: È importante ricordare che l'esempio si riferisce ad un *gas ideale*, per il quale l'energia è puramente cinetica. Per un gas reale, in cui non sono trascurabili le interazioni tra le molecole, l'energia interna comprende anche un contributo di energia potenziale. Per un gas reale non sarebbe quindi vero che l'energia interna non cambia se la temperatura resta costante, e viceversa.

Entrambi gli esempi mostrano che l'irreversibilità di una trasformazione comporta una perdita definitiva di possibilità di trasformare calore in lavoro, ovvero un degrado dell'energia totale da una forma maggiormente utilizzabile ad una forma meno utilizzabile.

Vogliamo ora introdurre un modo per misurare quantitativamente l'irreversibilità delle trasformazioni.

4.8.2 Il rapporto Q/T

Riprendiamo in considerazione il primo esempio, riguardante il trasferimento di calore tra due serbatoi a differente temperatura, e fissiamo dapprima l'attenzione sull'esperimento (b), in cui i

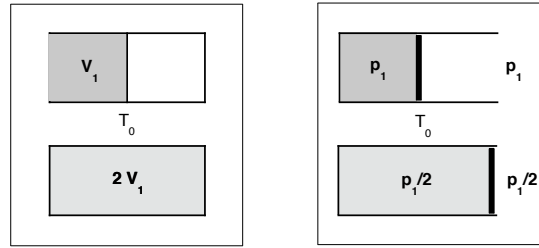


Figura 4.10: Espansione isoterma di un gas. A sinistra: espansione libera irreversibile. A destra: espansione reversibile.

due serbatoi sono messi in comunicazione tramite un motore termico reversibile. Poiché per un motore termico reversibile operante tra due soli serbatoi vale la relazione

$$\frac{|Q_1|}{|Q_2|} = \frac{T_1}{T_2},$$

allora si ha anche che

$$\frac{|Q_1|}{T_1} = \frac{|Q_2|}{T_2}. \quad (4.30)$$

Vogliamo ora mostrare come il rapporto Q/T può svolgere un ruolo importante nella misurazione dell'irreversibilità di un processo. A tale scopo dobbiamo tenere conto del segno di Q , positivo per il calore entrante in un sistema, negativo per il calore uscente. Consideriamo separatamente i tre sistemi costituiti dai due serbatoi e dal motore. Per motivi che risulteranno chiari più sotto, chiamiamo ΔS il rapporto Q/T .

- Il serbatoio a temperatura T_2 cede la quantità di calore Q_2 alla temperatura T_2 ; pertanto

$$\Delta S_2 = \frac{Q_2}{T_2} = \frac{-90 \text{ J}}{900 \text{ K}} = -0.1 \text{ J/K} < 0.$$

- Il motore ciclico assorbe la quantità di calore Q_2 alla temperatura T_2 e cede la quantità di calore Q_1 alla temperatura T_1 ; pertanto

$$\Delta S = \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_1}{T_1} = \left(+\frac{90}{900} - \frac{30}{300} \right) \text{ J/K} = 0.$$

- Il serbatoio a temperatura T_1 assorbe la quantità di calore Q_1 alla temperatura T_1 ; pertanto

$$\Delta S_1 = \frac{Q_1}{T_1} = \frac{30 \text{ J}}{300 \text{ K}} = +0.1 \text{ J/K} > 0.$$

Globalmente la somma dei tre contributi è nulla, perchè $\Delta S_1 + \Delta S_2 = Q_1/T_1 + Q_2/T_2 = 0$.

Passiamo ora a considerare l'esperimento (a), in cui il calore fluisce direttamente e irreversibilmente dal serbatoio a temperatura T_2 verso quello a temperatura T_1 .

- Il serbatoio a temperatura T_2 cede la quantità di calore $Q_2 = 90 \text{ J}$ alla temperatura $T_2 = 900 \text{ K}$; pertanto anche in questo caso

$$\Delta S_2 = \frac{Q_2}{T_2} = \frac{-90 \text{ J}}{900 \text{ K}} = -0.1 \text{ J/K} < 0.$$

- Il serbatoio a temperatura T_1 assorbe la stessa quantità di calore $Q_2 = 90 \text{ J}$ alla temperatura $T_1 = 300 \text{ K}$; pertanto

$$\Delta S_1 = \frac{Q_2}{T_1} = \frac{90 \text{ J}}{300 \text{ K}} = +0.3 \text{ J/K} > 0.$$

Globalmente questa volta la somma dei due contributi non è nulla, bensì positiva:

$$\Delta S_2 + \Delta S_1 = +0.2 \text{ J/K}.$$

L'irreversibilità del processo è dovuta al fatto che la stessa quantità di calore è scambiata dai due serbatoi a temperature diverse, cioè in seguito ad una differenza finita di temperatura; il serbatoio a temperatura più alta cede calore ($Q < 0$), quello a temperatura più bassa lo assorbe ($Q > 0$). Ciò si traduce nel fatto che la somma algebrica dei contributi Q/T è positiva.

4.8.3 Definizione macroscopica di entropia

Vogliamo ora generalizzare le considerazioni fatte qui sopra circa la misurazione dell'irreversibilità mediante il rapporto Q/T . Allo scopo, fissiamo l'attenzione su un sistema che subisce una trasformazione ciclica reversibile, ad esempio il motore reversibile dell'esempio precedente. Abbiamo visto sopra che per il motore reversibile

$$\frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_1}{T_1} = \sum_i \frac{Q_i}{T_i} = 0.$$

Si può generalizzare questa relazione ad un sistema ciclico che scambia reversibilmente calore con un numero qualsiasi di serbatoi, adeguando di conseguenza il numero di termini della sommatoria $\sum_i Q_i/T_i$, che vale comunque zero. È conveniente, per poter applicare i formalismi del calcolo differenziale e integrale, passare al limite per un numero infinito di serbatoi, e sostituire la sommatoria con un integrale:

$$\oint \frac{dQ_{\text{rev}}}{T} = 0, \quad (4.31)$$

dove il simbolo \oint indica l'integrale su un percorso chiuso, cioè su una trasformazione ciclica. La (4.31), detta anche teorema di Clausius, implica che per qualsiasi trasformazione reversibile che collega due stati termodinamici A e B di un sistema l'integrale

$$\int_A^B \frac{dQ_{\text{rev}}}{T} \quad (4.32)$$

assume lo stesso valore, dipendente solo dagli stati iniziale e finale A e B .

La situazione formale è la stessa che abbiamo incontrato studiando le forze conservative nel Capitolo 3: il fatto che il lavoro di una forza conservativa non dipenda dal cammino ma solo dalle posizioni iniziale e finale aveva consentito di introdurre l'energia potenziale E_p , funzione della posizione e definita a meno di una costante additiva, tale che $W_{AB} = E_p(A) - E_p(B)$.

Analogamente, il fatto che l'integrale della (4.32) dipenda solo dagli stati iniziale e finale A e B implica che esiste una grandezza S , funzione dello stato termodinamico del sistema e definita a meno di una costante additiva, tale che

$$\Delta S = \int_A^B \frac{dQ_{\text{rev}}}{T}. \quad (4.33)$$

Questa nuova grandezza si chiama *entropia*. Le sue variazioni si misurano mediante l'integrale della (4.33), effettuato sempre e solo su trasformazioni reversibili. L'entropia si misura in J/K.

Possiamo riassumere così questo paragrafo:

- Abbiamo introdotto una funzione S dello stato termodinamico dei sistemi, definita a meno di una costante additiva. (Si ricordi che anche l'energia interna U è una funzione dello stato termodinamico, definita a meno di una costante additiva).
- Poiché l'entropia è funzione dello stato termodinamico, la differenza di entropia tra due stati A e B , $\Delta S = S_B - S_A$, non dipende dalla particolare trasformazione (reversibile o irreversibile) che collega i due stati.
- Per *calcolare* la differenza di entropia tra due stati, $\Delta S = S_B - S_A$, si deve ricorrere alla (4.33), ovvero eseguire l'integrale di dQ/T su una qualsiasi trasformazione *reversibile* che collega A a B .

4.8.4 Significato macroscopico dell'entropia

Possiamo ora riprendere l'esempio dei due serbatoi che scambiano calore direttamente o per mezzo di un motore reversibile, e generalizzare (senza dimostrazione) i risultati che abbiamo ricavato precedentemente.

- Se un sistema subisce una trasformazione *ciclica* (reversibile o irreversibile), la sua entropia, che è funzione di stato, non varia.
- Un sistema *non isolato* può aumentare o diminuire la sua entropia a seconda della trasformazione subita, reversibile o irreversibile (ad esempio, in entrambi gli esperimenti il serbatoio caldo diminuisce la sua entropia, il serbatoio freddo aumenta la sua entropia).
- Un *sistema isolato* che subisce una trasformazione *reversibile* non modifica la sua entropia totale, $\Delta S = 0$. È il caso, ad esempio, del sistema costituito dai due serbatoi e dal motore termico dell'Esempio 1, esperimento (b).
- Un *sistema isolato* che subisce una trasformazione *irreversibile* aumenta sempre la sua entropia, $\Delta S > 0$. È il caso, ad esempio, del sistema costituito dai due serbatoi messi direttamente a contatto nell'Esempio 1, esperimento (a).

È istruttivo eseguire il calcolo delle variazioni di entropia nel caso del secondo esempio considerato sopra, l'espansione di un gas ideale, reversibile oppure libera (Fig. 4.10).

Partiamo dall'espansione reversibile. Il gas esegue sull'esterno un lavoro $W = nRT_0 \ln 2 = 172.8 \text{ J}$ ed assorbe reversibilmente una pari quantità Q_{rev} di calore dall'ambiente a temperatura costante $T_0 = 300 \text{ K}$. Tenendo conto che $Q_{\text{rev}} = W$, si può calcolare la variazione di entropia del gas, che risulta positiva:

$$\Delta S_{\text{gas}} = S_B - S_A = \frac{Q_{\text{rev}}}{T_0} = nR \ln 2 = 0.576 \text{ J/K}. \quad (4.34)$$

Il gas del cilindro assorbe il calore Q_{rev} dall'ambiente. Pertanto l'ambiente, che cede il calore alla temperatura T_0 , subisce una pari e contraria variazione di entropia, $\Delta S_{\text{amb}} = -Q_{\text{rev}}/T_0 = -0.576 \text{ J/K}$. Globalmente il sistema isolato costituito dal gas più il suo ambiente subisce una variazione nulla di entropia.

Passiamo ora a considerare l'espansione libera irreversibile. Il gas questa volta non scambia calore con l'ambiente, $Q = 0$. Lo stato iniziale e finale del gas sono però gli stessi della trasformazione reversibile, e quindi uguale sarà la variazione di entropia subita dal gas, che può essere comunque calcolata solo lungo una trasformazione reversibile (Eq. 4.34): $\Delta S_{\text{gas}} = Q_{\text{rev}}/T_0 = 0.576 \text{ J/K}$. Il gas aumenta quindi la sua entropia anche in questo caso. Poiché però non c'è scambio di calore con l'ambiente, non c'è una corrispondente diminuzione di entropia dell'ambiente. Globalmente il sistema isolato costituito dal gas più il suo ambiente subisce una variazione positiva di entropia.

Possiamo ulteriormente chiarire le proprietà dell'entropia:

- Per un sistema isolato l'aumento di entropia rappresenta il criterio di evoluzione per le trasformazioni irreversibili. Un sistema isolato che si trovi inizialmente in uno stato i può evolvere spontaneamente verso uno stato f solo se l'entropia dello stato f è maggiore o al più uguale di quella dello stato i .
- L'aumento di entropia nelle trasformazioni irreversibili dei sistemi isolati è legato al degrado dell'energia, cioè alla perdita della possibilità di ottenere lavoro. Consideriamo una trasformazione da uno stato iniziale i ad uno stato finale f . Si può dimostrare che il *lavoro perduto* W_p , cioè la differenza tra
 - a) lavoro W_{rev} che si sarebbe potuto ottenere se la trasformazione $i \rightarrow f$ fosse stata fatta in modo perfettamente reversibile,
 - b) lavoro W_{irr} ottenuto dalla trasformazione reale irreversibile,



Figura 4.11: Espansione libera isoterma di un gas.

può essere espresso come

$$W_p = W_{\text{rev}} - W_{\text{irr}} = T_0 \Delta S, \quad (4.35)$$

dove T_0 è la temperatura più bassa a disposizione, ΔS è la variazione di entropia del sistema isolato.

Esempio 1: Riprendiamo in considerazione l'Esempio 1, trasferimento di calore da una sorgente calda ad una sorgente fredda (Fig. 4.9). La temperatura più bassa disponibile è T_1 . Il lavoro per la trasformazione reversibile, tenendo conto della (4.27), è $W_{\text{rev}} = \eta_{\text{rev}}|Q_2| = (1 - T_1/T_2)|Q_2|$. Il lavoro per la trasformazione irreversibile è $W_{\text{irr}} = 0$. La variazione di entropia per la trasformazione irreversibile è $\Delta S = |Q_2|(1/T_1 - 1/T_2)$. È facile verificare che $W_p = T_1 \Delta S$.

Esempio 2: Riprendiamo in considerazione l'Esempio 2, espansione isoterma di un gas ideale (Fig. 4.10). Il lavoro per la trasformazione reversibile è $W_{\text{rev}} = Q$, il lavoro per la trasformazione irreversibile è $W_{\text{irr}} = 0$, la variazione di entropia per la trasformazione irreversibile è $\Delta S = Q/T_0$. Pertanto è facile verificare che $W_p = T_0 \Delta S$.

4.9 Interpretazione microscopica dell'entropia

Il significato dell'entropia può essere reso più chiaro dalla sua interpretazione microscopica, cioè in termini di struttura atomica. Data la complessità della trattazione matematica, ci limiteremo qui solo ad esporre alcuni concetti base e a fare un esempio particolarmente semplice.

4.9.1 Macrostatto e microstati

Come abbiamo visto, lo stato macroscopico di un sistema termodinamico è individuato dal valore di un numero limitato di coordinate termodinamiche. Per una sostanza pura sono sufficienti due coordinate termodinamiche, ad esempio pressione e volume (p, V), oppure pressione e temperatura (p, T). Per fissare le idee, consideriamo un gas molto rarefatto, da trattare come gas ideale.

Ad un dato stato macroscopico di un sistema termodinamico corrisponde un numero molto elevato di possibili stati microscopici, ovvero di modi in cui l'energia totale viene distribuita tra i diversi costituenti elementari. Consideriamo una mole di gas ideale. L'energia totale si ripartisce sotto forma di energia cinetica tra 6×10^{23} molecole. È intuitivo che questa ripartizione può avvenire in un numero elevatissimo di modi diversi, che si differenziano non solo per l'energia cinetica posseduta dalle singole molecole, ma anche, a parità di energia cinetica di una molecola, per le diverse orientazioni del vettore velocità. Indicheremo con Ω il numero totale di microstati che realizzano un determinato stato termodinamico macroscopico di un sistema. Il calcolo del numero Ω di microstati è tutt'altro che banale, in molti casi, tipicamente nell'ambito della fisica classica, è addirittura impossibile. È tuttavia possibile studiare quantitativamente come varia il numero Ω di microstati al variare dello stato termodinamico macroscopico di un sistema.

4.9.2 Microstati e trasformazioni

Per fare un esempio semplice ma particolarmente significativo, torniamo a considerare l'espansione libera di un gas ideale, dal volume V_i al volume $V_f = 2V_i$ (Fig. 4.11):

- lo stato di equilibrio macroscopico iniziale a volume V_i corrisponde a Ω_i possibili stati microscopici equivalenti ed equiprobabili, che vengono visitati dal sistema in modo continuo e casuale;
- quando viene rotta la separazione tra le due parti del contenitore, si innesca un processo irreversibile di diffusione del gas nella parte libera;
- all'equilibrio finale, lo stato macroscopico corrisponde ad un numero Ω_f di stati microscopici equivalenti ed equiprobabili.

Anche se non è possibile determinare i valori di Ω_i e Ω_f , è però possibile trovare una relazione tra i due valori. Poiché lo stato finale ha la stessa temperatura dello stato iniziale, è rimasta invariata la distribuzione dell'energia tra le diverse molecole del gas. Tuttavia ogni molecola ha ora due possibilità equiprobabili, stare nella parte inizialmente piena del recipiente, oppure nella parte inizialmente vuota. Se ci sono in totale N molecole ($N \simeq 10^{23}$), ciò corrisponde a 2^N possibilità nuove. Pertanto la relazione tra i numeri di microstati nello stato iniziale e nello stato finale è

$$\Omega_f = 2^N \Omega_i \simeq 2^{10^{23}} \Omega_i. \quad (4.36)$$

La variazione del numero di microstati quando il volume del gas raddoppia è evidentemente enorme.

4.9.3 Microstati e irreversibilità

Abbiamo già osservato che l'espansione libera di un gas è un processo macroscopicamente irreversibile, in quanto non è possibile ripristinare lo stato iniziale senza l'intervento di agenti esterni. Siamo ora in grado di dare un'interpretazione microscopica dell'irreversibilità.

Nello stato finale il sistema ha a disposizione Ω_f microstati. A causa delle continue interazioni delle molecole tra di loro e con le pareti del recipiente, il sistema si muove continuamente e in modo casuale tra i vari microstati, che sono equiprobabili. Può quindi succedere che il sistema si trovi casualmente in uno dei microstati che corrispondono al macrostato iniziale (tutte le molecole in una metà del recipiente). In altri termini, da un punto di vista microscopico non è impossibile che il sistema torni spontaneamente allo stato iniziale. Dobbiamo però domandarci qual è la probabilità che ciò accada.

La probabilità che tutte le molecole si trovino in una metà del recipiente è

$$\mathcal{P} = \frac{\text{numero di microstati favorevoli}}{\text{numero totale di microstati}} = \frac{\Omega_i}{\Omega_f} \simeq \frac{1}{2^{10^{23}}}, \quad (4.37)$$

cioè estremamente bassa, al punto da poter essere considerata nulla a tutti gli effetti pratici.

L'irreversibilità macroscopica di un processo termodinamico è quindi legata non all'impossibilità microscopica del processo inverso, bensì alla sua ridottissima probabilità.

4.9.4 Microstati e probabilità

Confrontiamo ora la descrizione macroscopica e la descrizione microscopica dell'espansione libera del gas ideale, per trovare una relazione tra variazione di entropia e variazione del numero di stati microscopici.

Da un punto di vista macroscopico, la variazione di entropia è calcolata lungo una trasformazione reversibile che collega lo stato iniziale i e lo stato finale f , ed è espressa dall'Eq. (4.34). Sostituendo $nR = Nk_B$ si ha, per l'espansione libera che raddoppia il volume del gas,

$$S_f - S_i = Nk_B \ln 2. \quad (4.38)$$

Dal punto di vista microscopico abbiamo visto che il rapporto tra numero di microstati finali e iniziali è

$$\frac{\Omega_f}{\Omega_i} = 2^N. \quad (4.39)$$

Le due equazioni (4.38) e (4.39) si corrispondono se si fa il seguente collegamento tra entropia S e numero di microstati Ω :

$$S = k_B \ln \Omega. \quad (4.40)$$

L'eq. (4.40), proposta da L. Boltzmann alla fine del 1800, riveste carattere generale, e consente di dare un'interpretazione microscopica dell'entropia in termini di numero di microstati che realizzano un determinato stato macroscopico di qualsiasi sistema.

L'aumento di entropia nelle trasformazioni irreversibili dei sistemi isolati corrisponde all'aumento del numero di stati microscopici. Il numero di microstati corrispondenti ad un determinato stato macroscopico viene talvolta considerato come una misura di "disordine": la crescita dell'entropia viene quindi spesso equiparata ad una crescita di disordine.

Capitolo 5

Elettromagnetismo

5.1 Atomi e carica elettrica

Come abbiamo già osservato ai § 1.5 e 4.1, la materia è fatta di atomi, particelle delle dimensioni dell'ordine di 10^{-10} m. Esistono in natura 92 tipi diversi di atomi, che, opportunamente assemblati, danno origine a tutti i possibili aggregati solidi, liquidi e gassosi.

5.1.1 La struttura atomica

Gli atomi sono dotati di struttura interna. Ogni atomo è costituito da un *nucleo* di dimensioni molto ridotte, dell'ordine di 10^{-14} m, intorno al quale si muovono gli *elettroni*, particelle di dimensioni trascurabili. A sua volta, il nucleo atomico contiene due diversi tipi di particelle, i *protoni* ed i *neutroni*.

Indicheremo con i simboli e^- , p , n rispettivamente elettroni, protoni e neutroni.

Il moto degli elettroni intorno al nucleo non può essere descritto dalle leggi della dinamica che abbiamo introdotto al Cap. 3, e che sono valide per i corpi di dimensioni macroscopiche. La descrizione dei fenomeni a livello atomico e subatomico richiede un insieme di differenti principi ed un formalismo peculiare, che vanno sotto il nome di meccanica quantistica. Senza entrare in ulteriori dettagli, ci limiteremo a dire che non è possibile descrivere il moto degli elettroni mediante traiettorie ben definite; il massimo di informazione che si può ottenere consiste nella densità di probabilità di trovare un elettrone in un qualsiasi punto dello spazio.

Individuiamo un generico punto con un vettore posizione \vec{r} avente origine nel nucleo dell'atomo. Lo stato dinamico di un elettrone è descritto da una funzione $\psi(\vec{r})$, generalmente complessa, il cui modulo quadrato $|\psi(\vec{r})|^2$ dà la densità di probabilità di trovare l'elettrone nella posizione \vec{r} . Le funzioni $\psi(\vec{r})$ sono dette "orbitali atomici".

La *massa* dell'atomo è concentrata nel nucleo. La Tab. 5.1 riporta le masse, espresse in chilogrammi, dei tre costituenti elementari dell'atomo. Protoni e neutroni hanno masse molto simili, la differenza è di poco superiore allo 0.1%. Gli elettroni hanno invece una massa molto minore, circa 1840 volte più piccola di quella dei protoni e dei neutroni.

L'atomo si può quindi considerare essenzialmente vuoto: la massa è concentrata quasi unicamente nel nucleo, cioè in una regione spaziale molto più piccola delle dimensioni globali dell'atomo. Le dimensioni globali di un atomo sono definite dall'estensione delle nubi di densità di probabilità $|\psi(\vec{r})|^2$ di tutti i suoi elettroni.

5.1.2 La carica elettrica

Protoni ed elettroni interagiscono tra di loro secondo le seguenti modalità:

- due protoni ($p - p$) si respingono;
- due elettroni ($e^- - e^-$) si respingono;

Tabella 5.1: Costituenti elementari dell'atomo: massa e carica elettrica.

	massa	carica elettrica
Protone	1.6726×10^{-27} kg	$+e = 1.6 \times 10^{-19}$ C
Neutrone	1.6749×10^{-27} kg	0
Elettrone	0.0009×10^{-27} kg	$-e = 1.6 \times 10^{-19}$ C

- un elettrone ed un protone ($p - e^-$) si attraggono;
- il modulo della forza di attrazione o repulsione è inversamente proporzionale al quadrato della distanza tra le due particelle interagenti, indipendentemente dalla loro natura ($p - p$, $e^- - e^-$, $p - e^-$);
- a parità di distanza, il modulo della forza è uguale per tutte le coppie di particelle ($p - p$, $e^- - e^-$, $p - e^-$).

Questo tipo di interazione viene interpretato attribuendo ad elettroni e protoni una proprietà, detta *carica elettrica*, dotata di segno. Particelle con carica di uguale segno si respingono, particelle con carica di segno opposto si attraggono. Elettroni e protoni hanno carica elettrica di uguale valore assoluto e di segno opposto. Il valore assoluto, detto *carica elementare*, viene indicato con il simbolo e . Agli elettroni è attribuita una carica negativa $-e$, ai protoni una carica positiva $+e$. (Non si confonda il simbolo della carica elementare $\pm e$ con il simbolo dell'elettrone e^- .)

I neutroni sono privi di carica elettrica. Ogni atomo contiene un uguale numero di protoni e di elettroni, per cui l'atomo nel suo complesso si dice elettricamente neutro.

La carica elementare e rappresenta il più piccolo valore che una carica elettrica può assumere. Un corpo macroscopico da cui vengono rimossi N elettroni assume una carica elettrica positiva $q = +Ne$. Un corpo macroscopico cui vengono aggiunti N elettroni assume una carica elettrica negativa $q = -Ne$. Naturalmente, corpi macroscopici di uguale carica si respingono e corpi macroscopici di carica opposta si attraggono.

Per motivi storici e di praticità, l'unità di misura della carica elettrica non è la carica elementare, bensì una carica positiva corrispondente alla carica globale di circa 6.25×10^{18} protoni. A tale unità si è attribuito il nome di *coulomb* (C); con precisione, la carica elementare espressa in unità coulomb vale

$$e = 1.602176462(63) \times 10^{-19} \text{ C}.$$

Questo Capitolo sarà dedicato allo studio dei fenomeni legati alla carica elettrica. Considereremo prima l'interazione tra cariche elettriche in quiete (elettrostatica, campo elettrico), poi i fenomeni connessi con le cariche elettriche in moto (correnti elettriche, circuiti elettrici, campo magnetico). Fenomeni elettrici e magnetici sono strettamente correlati, e in generale si parla globalmente di *elettromagnetismo*.

5.1.3 Numero atomico e tavola periodica degli elementi

Il numero di elettroni e protoni presenti in un atomo è detto *numero atomico* Z . Il numero atomico Z definisce la specificità chimica di un atomo. Esistono in natura 92 specie di atomi, ciascuno dotato di un simbolo convenzionale di una o due lettere; alcuni esempi:

- $Z = 1$, 1 protone e 1 elettrone, è l'atomo più leggero, l'idrogeno (simbolo H);
- $Z = 2$, 2 protoni e 2 elettroni, è l'atomo del gas nobile elio (He);
- $Z = 8$, 8 protoni e 8 elettroni, è l'atomo dell'ossigeno (O);
- $Z = 92$, 92 protoni e 92 elettroni, è l'atomo più pesante presente in natura, l'uranio (U).

Specie atomiche con $Z > 92$ (atomi transuranici) sono stati prodotti artificialmente in laboratorio. Le 92 specie atomiche naturali e le specie transuraniche vengono generalmente elencate sotto forma di tabella, la cosiddetta "tavola periodica" (Fig. 5.1).

1 H 1																	2 He 4
3 Li 7	4 Be 9											5 B 11	6 C 12	7 N 14	8 O 16	9 F 19	10 Ne 20
11 Na 23	12 Mg 24											13 Al 27	14 Si 28	15 P 31	16 S 32	17 Cl 35	18 Ar 40
19 K 39	20 Ca 40	21 Sc 45	22 Ti 48	23 V 51	24 Cr 52	25 Mn 55	26 Fe 56	27 Co 59	28 Ni 59	29 Cu 64	30 Zn 65	31 Ga 70	32 Ge 73	33 As 75	34 Se 79	35 Br 80	36 Kr 84
37 Rb 85	38 Sr 88	39 Y 89	40 Zr 91	41 Nb 93	42 Mo 96	43 Tc 99	44 Ru 101	45 Rh 103	46 Pd 106	47 Ag 108	48 Cd 112	49 In 115	50 Sn 119	51 Sb 122	52 Te 128	53 I 127	54 Xe 131
55 Cs 133	56 Ba 137	57 La 139	72 Hf 178	73 Ta 181	74 W 184	75 Re 186	76 Os 190	77 Ir 192	78 Pt 195	79 Au 197	80 Hg 201	81 Tl 204	82 Pb 207	83 Bi 209	84 Po 210	85 At 210	86 Rn 222
87 Fr 223	88 Ra 226	89 Ac 227	104 Unq 261	105 Unp 262	106 Unh 263												

numero atomico Z
conta le cariche nucleari (protoni)

peso atomico A
conta le masse nucleari (protoni e neutroni)

58 Ce 140	59 Pr 141	60 Nd 144	61 Pm 145	62 Sm 150	63 Eu 152	64 Gd 157	65 Tb 159	66 Dy 163	67 Ho 165	68 Er 167	69 Tm 169	70 Yb 173	71 Lu 175
90 Th 232	91 Pa 231	92 U 238	93 Np 237	94 Pu 242	95 Am 243	96 Cm 247	97 Bk 249	98 Cf 251	99 Es 254	100 Fm 253	101 Md 256	102 No 254	103 Lw 257

Figura 5.1: Tavola periodica degli elementi. Ad ogni specie atomica è dedicata una casella contenente il simbolo chimico al centro, il numero atomico Z (numero di protoni) in alto, e il numero di massa medio A (protoni + neutroni) in basso. Elementi appartenenti alla medesima colonna presentano proprietà chimiche affini. Le due righe in basso, $Z = 58 - 71$ e $Z = 90 - 103$, andrebbero inserite nel corpo principale della tabella, rispettivamente dopo le caselle $Z = 57$ e $Z = 89$.

L'atomo è tenuto insieme dalla forza elettrostatica che lega gli elettroni, carichi negativamente, al nucleo carico positivamente. Una descrizione dettagliata della struttura elettronica degli atomi può essere fatta solo nell'ambito della meccanica quantistica. Vogliamo comunque qui ricordare che gli elettroni di un atomo sono ripartiti in gruppi con differenti energie di legame e con differenti distribuzioni spaziali di probabilità. Sono queste proprietà che caratterizzano chimicamente le diverse specie atomiche, e sono responsabili, ad esempio, dei seguenti fatti:

- gli atomi dei gas nobili tendono a rimanere isolati;
- gli atomi di idrogeno, ossigeno, azoto formano, nello stato gassoso, molecole biatomiche, H_2 , O_2 , N_2 ;
- atomi diversi si legano in modo differente e, allo stato solido, danno origine a strutture cristalline differenti.

In conclusione, le forze di natura elettromagnetica sono responsabili di gran parte dei fenomeni osservabili macroscopicamente: legami chimici, forze d'attrito, forze d'interazione tra le molecole dei gas, struttura e proprietà dei solidi.

5.1.4 Il nucleo atomico

Come abbiamo detto più sopra, la struttura e la stabilità dell'atomo sono dovute alla forza di attrazione elettrostatica tra gli elettroni, carichi negativamente, e il nucleo, carico positivamente. In realtà, la carica positiva del nucleo è dovuta alla presenza di Z particelle distinte con carica positiva, i protoni. Come si spiega il fatto che i protoni, a dispetto della forza elettrostatica di repulsione, rimangono confinati nella ristretta regione spaziale del nucleo ?

La stabilità del nucleo è dovuta alla presenza di un'ulteriore forza, detta forza nucleare, che agisce indistintamente tra tutti i componenti del nucleo, protoni e neutroni. La forza nucleare è sempre attrattiva, ma agisce solo a distanze molto piccole, dell'ordine delle dimensioni del nucleo; a distanze maggiori la forza nucleare diviene trascurabile. La forza nucleare all'interno del nucleo prevale sulla forza di repulsione elettrostatica tra protoni.

Il numero di neutroni è generalmente di poco superiore al numero di protoni. Atomi con lo stesso numero atomico Z possono avere un diverso numero di neutroni. Atomi che differiscono solo per il numero di neutroni vengono detti *isotopi*. Isotopi differenti dello stesso atomo, avendo lo stesso numero atomico Z , hanno le stesse proprietà chimiche.

Esempio: Il germanio (Ge) ha numero atomico $Z = 32$. Un qualsiasi campione di germanio naturale è una miscelazione di differenti isotopi: il 20.5 % ha 38 neutroni, il 27.4 % ne ha 40, il 7.8 % ne ha 41, il 36.5 % ne ha 42, il 7.8 % ne ha 44.

Il numero totale di protoni e neutroni presenti nel nucleo di un dato isotopo è detto numero di massa A . Nella tavola periodica di Fig. 5.1, per ogni elemento è riportato il numero di massa medio dei diversi isotopi dell'elemento, arrotondato all'unità.

5.1.5 Interazioni fondamentali

È il caso di ricordare qui quanto abbiamo già detto al § 3.3. Tutti i fenomeni naturali sono descrivibili in termini di quattro forme fondamentali di interazione tra i corpi:

- interazione gravitazionale, responsabile dell'attrazione tra due corpi qualsiasi;
- interazione elettromagnetica, responsabile delle forze tra cariche elettriche in quiete e in movimento;
- interazione nucleare forte, responsabile delle forze tra le particelle sub-nucleari (protoni e neutroni, ma anche altri tipi di particelle);
- interazione nucleare debole, responsabile dei decadimenti radioattivi.

L'interazione gravitazionale è stata introdotta nel Capitolo dedicato alla Dinamica. Dell'interazione elettromagnetica ci occuperemo in questo Capitolo. Nel paragrafo precedente abbiamo brevemente accennato all'interazione nucleare forte. Non ci occuperemo invece ulteriormente dell'interazione nucleare debole.

5.2 Elettrostatica: aspetti fondamentali

5.2.1 Corpi elettricamente carichi

Un atomo cui vengano aggiunti o da cui vengano rimossi uno o più elettroni perde la neutralità elettrica, cioè l'equilibrio tra le cariche positive e negative. Un atomo non neutro, cioè elettricamente carico, è detto una *ione*. Un atomo che ha perso elettroni è una *ione positivo*. Un atomo che ha acquistato elettroni è una *ione negativo*. Vediamo alcuni esempi:

- nei gas a temperature molto elevate (migliaia di kelvin) gli urti tra le molecole possono provocarne la ionizzazione; il gas si trasforma in un *plasma*, cioè una miscelazione di ioni molecolari positivi e di elettroni negativi, entrambi mobili;
- le soluzioni elettrolitiche contengono ioni positivi e ioni negativi, entrambi mobili;

- nei solidi, gli ioni positivi sono fissati alle posizioni del reticolo cristallino, e solo gli elettroni possono muoversi (fanno eccezione gli elettroliti solidi, in cui anche alcuni tipi di ioni positivi possono muoversi).

La maggiore o minore mobilità degli elettroni nei solidi determina le proprietà macroscopiche di conduzione elettrica; ad esempio:

- il rame (Cu) è un buon conduttore di elettricità;
- il silicio (Si) allo stato puro è un povero conduttore di elettricità (è detto semiconduttore);
- il diamante (una forma cristallina del carbonio, C), pur avendo la stessa struttura del silicio, è un pessimo conduttore, cioè un ottimo isolante.

Anche corpi macroscopici, cioè costituiti da un numero molto grande di atomi (dell'ordine del numero di Avogadro), possono presentare una carica elettrica, positiva o negativa, sperimentalmente osservabile. Un corpo macroscopico può venire caricato elettricamente prelevando o aggiungendo elettroni, ad esempio per sfregamento con opportuni materiali.

5.2.2 Cariche puntiformi: legge di Coulomb

Consideriamo due corpi macroscopici di dimensioni trascurabili rispetto alla reciproca distanza, elettricamente carichi. Siano q_1 e q_2 , rispettivamente, le loro cariche elettriche. I due corpi si attirano se le due cariche sono discordi in segno, si respingono se le due cariche sono concordi in segno (Fig. 5.2, a sinistra). Come abbiamo già detto a proposito delle cariche elementari del protone e dell'elettrone, l'intensità della forza è inversamente proporzionale al quadrato della distanza. Gli esperimenti, iniziati da C. A. de Coulomb alla fine del '700, hanno mostrato che l'intensità della forza elettrostatica si può esprimere nella forma

$$F_e = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (5.1)$$

Se le cariche sono misurate in coulomb e le distanze in metri, e i due corpi si trovano nel vuoto,

- la costante k_e vale $k_e = 8.99 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$ (il valore numerico corrisponde a $10^{-7} c^2$, dove c è la velocità della luce nel vuoto);
- la costante ϵ_0 , detta *costante dielettrica del vuoto*, vale $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ C}^2$.

Nella (5.1) il valore di F_e è positivo se le cariche sono concordi (forza repulsiva), negativo se le cariche sono discordi (forza attrattiva).

Si noti la somiglianza formale della legge di Coulomb (5.1) con la legge della gravitazione universale (3.4) introdotta al § 3.2:

$$F_g = \mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (5.2)$$

dove la costante di gravitazione universale vale $\mathcal{G} = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$.

La forza di gravitazione universale (5.2) agisce tra qualsiasi coppia di corpi ed è sempre attrattiva. La forza elettrostatica (5.1) agisce solo tra corpi elettricamente carichi e può essere sia attrattiva che repulsiva. In genere, la forza elettrostatica è molto maggiore di quella gravitazionale.

Esempio: Consideriamo due protoni alla distanza $r = 10^{-14} \text{ m}$ (dimensione tipica del nucleo atomico). È facile verificare che la forza repulsiva elettrostatica vale $F_e \simeq 2.3 \text{ N}$, mentre la forza attrattiva gravitazionale vale $F_g \simeq 1.86 \times 10^{-36} \text{ N}$.

5.2.3 Il campo elettrico

La legge di Coulomb (5.1) si riferisce alla forza di interazione tra coppie di cariche elettriche, q_1 e q_2 . È utile affrontare il problema da un altro punto di vista. Consideriamo ancora due cariche, le chiamiamo questa volta q e q_0 , con $q_0 > 0$; la forza di interazione è, numericamente,

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \right) q_0 = E q_0. \quad (5.3)$$

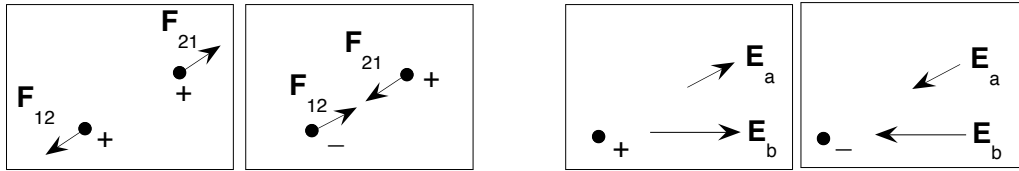


Figura 5.2: A sinistra: due cariche di ugual segno si respingono, due cariche di segno opposto si attraggono. A destra: campi elettrici prodotti in due diversi punti a e b dello spazio da una carica positiva e da una carica negativa.

Nell'ultimo passaggio si è indicata sinteticamente con E la quantità tra parentesi. Per tener conto del carattere vettoriale della forza F_e , si attribuisce un carattere vettoriale anche a \vec{E} , per cui

$$\vec{F}_e = q_0 \vec{E}. \quad (5.4)$$

I passaggi suesposti si possono interpretare nel modo seguente.

La carica q genera nello spazio circostante un “campo elettrico”, $\vec{E}(\vec{r})$, che a sua volta agisce sulla carica q_0 con una forza \vec{F}_e . Il vettore *campo elettrico* \vec{E} dipende dalla carica q e dalla distanza r , ma non dipende dal valore della carica q_0 (che viene chiamata carica “di prova”). Le proprietà del campo elettrico generato da una carica puntiforme q sono (Fig. 5.2, a destra):

- direzione radiale rispetto alla carica che lo genera,
- verso uscente se la carica generatrice è positiva, verso entrante se la carica generatrice è negativa,
- modulo

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}. \quad (5.5)$$

L'unità di misura del campo elettrico è la forza unitaria divisa per la carica unitaria, 1 N/C . Introduciamo più avanti un'altra unità di misura, usata più frequentemente.

Se sono presenti più cariche elettriche (q_1, q_2, \dots, q_n), ognuna delle cariche darà luogo, in un dato punto \vec{r} dello spazio, ad un contributo al campo elettrico \vec{E}_i ($i = 1, \dots, n$) di direzione radiale e valore numerico dato dalla (5.5). Il campo elettrico totale nel punto \vec{r} dello spazio è la somma vettoriale dei campi elettrici delle singole cariche:

$$\vec{E}_{\text{tot}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n. \quad (5.6)$$

La forza elettrostatica su una qualsiasi carica q_0 inserita nel campo elettrico è

$$\vec{F}_e = q_0 \vec{E}_{\text{tot}}. \quad (5.7)$$

Il campo elettrico \vec{E} descrive quindi una proprietà dello spazio (anche vuoto) indotta dalla presenza delle cariche q_1, q_2, \dots, q_n , o in generale di una qualsiasi distribuzione anche continua di carica.

Il problema dell'interazione tra cariche elettriche viene separato in due passi logicamente distinti:

1. calcolo del campo elettrico generato da una distribuzione di cariche elettriche in quiete;
2. calcolo della forza che il campo elettrico esercita su una ulteriore carica in quiete.

5.2.4 Cariche elettriche nei conduttori metallici

Vediamo, da un punto di vista puramente qualitativo, una prima applicazione del concetto di campo elettrico.

Nei conduttori metallici solo gli elettroni sono liberi di muoversi. Un eccesso di elettroni crea una carica globale negativa, una carenza di elettroni crea una carica globale positiva. Poiché cariche dello stesso segno si respingono e gli elettroni in un metallo sono liberi di muoversi, la carica globale

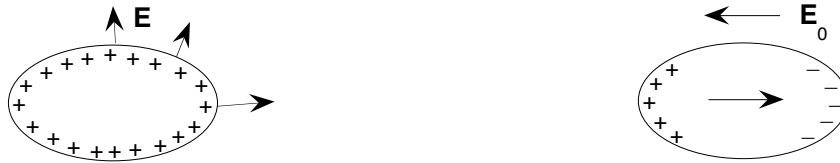


Figura 5.3: A sinistra: in un conduttore carico la carica elettrica (positiva o negativa) si distribuisce sulla superficie, e il campo elettrico è sempre perpendicolare alla superficie stessa. A destra: un conduttore neutro immerso in un campo elettrico esterno \vec{E}_0 .

in un metallo si distribuisce sulla superficie, lasciando la regione interna elettricamente neutra (Fig. 5.3, a sinistra).

In un conduttore metallico elettricamente carico in equilibrio, il campo elettrico \vec{E} è diverso da zero solo sulla superficie. All'interno del metallo il campo è nullo: un campo diverso da zero provocherebbe infatti un movimento delle cariche libere, fino a raggiungere una situazione di equilibrio con campo nullo.

Il campo elettrico alla superficie del metallo è sempre perpendicolare alla superficie. Una componente non nulla parallela alla superficie provocherebbe un movimento di cariche libere fino a raggiungere una situazione di equilibrio con componente parallela nulla.

Consideriamo ora un conduttore metallico neutro, in cui cioè le cariche positive e le cariche negative si compensano esattamente. Se il conduttore neutro è immerso in un campo elettrico esterno \vec{E}_0 , il campo esterno produce una migrazione degli elettroni nella direzione opposta al campo \vec{E}_0 . Si accumula così carica positiva sulla superficie del conduttore dalla parte indicata dal verso di \vec{E}_0 , carica negativa dalla parte opposta (Fig. 5.3, a destra). Lo squilibrio di carica sulla superficie del conduttore crea un campo $-\vec{E}_0$ all'interno del conduttore che compensa il campo esterno. Pertanto, all'interno di un conduttore metallico (incluse eventuali cavità) il campo elettrico è sempre nullo. Un involucro metallico costituisce quindi uno schermo dei campi elettrici esterni.

5.2.5 Il condensatore a facce piane parallele

Introduciamo ora un altro esempio particolare di campo elettrico generato da una distribuzione di cariche, che riveste notevole importanza sia concettuale che pratica.

Consideriamo due lastre metalliche piane e parallele, di superficie A , poste a distanza s nel vuoto (Fig. 5.4, a sinistra). Sulle due lastre sono presenti due cariche elettriche uguali e contrarie, $+q$ e $-q$. Un dispositivo di questo tipo è detto *condensatore* a facce piane parallele. Le due lastre sono dette anche "armature" del condensatore.

Si può dimostrare che il campo elettrico \vec{E} , nella regione centrale tra le due lastre (Fig. 5.4, a destra), è:

- perpendicolare alle lastre,
- uniforme, cioè uguale in tutti i punti,
- di modulo

$$E = q/\epsilon_0 A,$$

cioè proporzionale alla carica per unità di superficie e indipendente dalla distanza s tra le armature; ϵ_0 è la costante dielettrica del vuoto.

Il campo elettrico ha un andamento meno semplice in corrispondenza dei bordi delle lastre, ma qui e nel seguito ci limiteremo a considerare solo la regione centrale.

Nel prossimo § 5.3 utilizzeremo il condensatore piano per introdurre in modo semplice il concetto di potenziale elettrico. Introduciamo anche alcune applicazioni pratiche del condensatore e vedremo come cambia il campo elettrico se tra le due lastre lo spazio vuoto è sostituito da un materiale isolante.



Figura 5.4: Condensatore a facce piane parallele: vista in prospettiva (a sinistra) e schematica (a destra).

5.3 Il potenziale elettrico

Vogliamo introdurre una nuova grandezza, il potenziale elettrico, che svolge un ruolo fondamentale sia teorico che pratico nell'elettromagnetismo. Allo scopo, partiremo da un esempio semplice, cioè dal caso del condensatore a facce piane parallele introdotto appena sopra.

5.3.1 Caso semplice: il condensatore piano

Consideriamo ancora due lastre conduttrici piane e parallele, di superficie A poste a distanza s e dotate di carica uguale ed opposta, $+q$ e $-q$, rispettivamente (Fig. 5.4). Come abbiamo visto, tra le due lastre è presente un campo elettrico uniforme, diretto dalla lastra positiva verso la lastra negativa, di modulo $E = q/\epsilon_0 A$.

Prendiamo ora una carica positiva q_0 , inizialmente a contatto con la lastra carica positivamente e libera di muoversi nello spazio. Il campo elettrico agisce sulla carica positiva q_0 con una forza diretta verso la lastra negativa. Calcoliamo il lavoro che il campo elettrico \vec{E} fa quando la carica q_0 passa dalla lastra positiva alla lastra negativa, nell'ipotesi che la carica q_0 sia molto piccola rispetto alle cariche $+q$ e $-q$ presenti sulle armature del condensatore, per cui il suo spostamento non modifica sensibilmente il valore del campo \vec{E} . Il lavoro del campo elettrico

$$W_{\text{campo}} = \vec{F} \cdot \vec{r} = q_0 \vec{E} \cdot \vec{r} = q_0 E s \quad (5.8)$$

è positivo, in quanto lo spostamento \vec{r} ha lo stesso verso del campo elettrico \vec{E} .

È facile rendersi conto che il lavoro W non dipende dal particolare cammino percorso (il caso del campo elettrico uniforme nello spazio tra due lastre piane parallele è perfettamente analogo al caso dell'accelerazione di gravità).

Si può dimostrare che questa proprietà è vera in generale: in qualsiasi caso il lavoro della forza di interazione elettrostatica dipende solo dal punto di partenza e da quello di arrivo, non dal cammino percorso. La forza elettrostatica, come la forza gravitazionale, è una *forza conservativa*.

Anche per l'elettrostatica, come per la gravitazione, si può quindi introdurre un'energia potenziale E_p , cioè una funzione dei punti dello spazio definita a meno di una costante additiva, e tale che il lavoro del campo elettrico sia

$$W_{\text{campo}} = -\Delta E_p. \quad (5.9)$$

5.3.2 La differenza di potenziale elettrico

Il lavoro W (5.8) e la variazione di energia potenziale ΔE_p (5.9) dipendono dal valore della carica "di prova" q_0 . È molto utile potersi svincolare dal valore di q_0 . Allo scopo si introduce la *differenza di potenziale elettrico* ΔV , definita come

$$\Delta V = \frac{\Delta E_p}{q_0}. \quad (5.10)$$

Il potenziale elettrico, come l'energia potenziale, è sempre definito a meno di una costante additiva, e quindi se ne misurano sempre solo le variazioni ΔV tra due diversi punti dello spazio.

Come il campo elettrico, anche il potenziale elettrico descrive le proprietà elettriche intrinseche dello spazio prodotte da un insieme di cariche in quiete, senza la necessità di ricorrere a cariche "di prova".

L'unità di misura del potenziale elettrico è il volt (V): $1 \text{ V} = 1 \text{ J/C}$.

D'ora in avanti, per semplificare la notazione, indicheremo la differenza di potenziale con V anziché con ΔV . Quando necessario, il valore assoluto del potenziale sarà individuato da un indice, ad es. V_1, V_2 , etc.

È importante stabilire una relazione tra campo elettrico e differenza di potenziale elettrico. Consideriamo il caso semplice di un condensatore a facce piane parallele poste a distanza s (Fig. 5.4). Attribuiamo all'armatura superiore, carica positivamente, un valore arbitrario V_2 di potenziale; all'armatura inferiore, carica negativamente, corrisponderà un valore inferiore di potenziale V_1 . La differenza di potenziale tra armatura superiore (positiva) e armatura inferiore (negativa) è

$$V_{21} = V_2 - V_1 = [E_p(2) - E_p(1)]/q_0 = E s > 0. \quad (5.11)$$

La differenza di potenziale tra armatura inferiore (negativa) e armatura superiore (positiva) è

$$V_{12} = V_1 - V_2 = [E_p(1) - E_p(2)]/q_0 = -E s < 0. \quad (5.12)$$

Considerando solo il valore assoluto della differenza di potenziale si ha

$$V = E s, \quad E = V/s. \quad (5.13)$$

In conformità con l'ultima equazione, l'unità di misura del campo elettrico è generalmente espressa come V/m (volt su metro), anziché J/C (joule su coulomb).

Il concetto di potenziale elettrico si generalizza al caso di cariche elettriche distribuite in modo qualsiasi. Così pure si può generalizzare la relazione tra differenza di potenziale e campo elettrico. Per questo argomento si rimanda a trattazioni più approfondite.

5.3.3 Capacità di un condensatore

Come abbiamo visto, in un condensatore a facce piane parallele l'intensità del campo elettrico tra le due armature è proporzionale alla carica: $E = q/A\epsilon_0$. Poiché il modulo della differenza di potenziale è proporzionale al campo elettrico, $V = E s$, ne risulta che anche la differenza di potenziale è proporzionale alla carica elettrica. Tale proporzionalità è espressa dalla formula

$$q = C V. \quad (5.14)$$

La costante di proporzionalità C è detta *capacità* del condensatore. Per un condensatore a facce piane parallele posto nel vuoto, la capacità è data da

$$C = \frac{q}{V} = \frac{A E \epsilon_0}{E s} = \frac{\epsilon_0 A}{s} \quad (5.15)$$

cioè è proporzionale alla superficie A e inversamente proporzionale alla distanza s .

La capacità è una grandezza intrinsecamente positiva. La sua unità di misura è il farad (F): $1 \text{ F} = 1 \text{ C/1V}$.

5.3.4 Lavoro di carica di un condensatore

Vogliamo ora calcolare il lavoro che è necessario fare per *caricare un condensatore* inizialmente scarico, cioè per spostare progressivamente carica elettrica da un'armatura all'altra fino a raggiungere lo stato finale con cariche $+q$ e $-q$ sulle due armature.

Per spostare una carica infinitesima positiva dq dall'armatura negativa 1 a quella positiva 2 dobbiamo fare un lavoro infinitesimo dW_{ext} positivo contro il campo elettrico: la forza esterna che dobbiamo applicare ha lo stesso verso dello spostamento. Pertanto

$$dW_{\text{ext}} = E s dq = V dq. \quad (5.16)$$

Si noti che sia il campo elettrico E che la differenza di potenziale V crescono man mano che la carica si accumula sulle armature. Il lavoro necessario per creare uno stato di carica finita q sulle

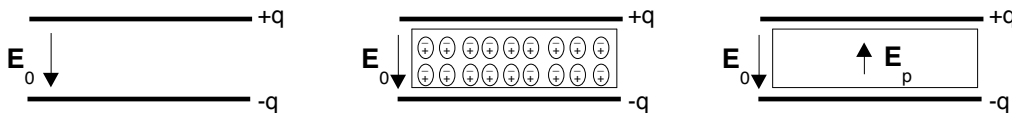


Figura 5.5: Polarizzazione di un dielettrico tra le due armature di un condensatore piano. La figura al centro non è in scala: i dipoli elettrici hanno dimensioni atomiche !

armature può essere calcolato integrando sulla carica infinitesima dq e ricordando che tra carica e differenza di potenziale esiste la relazione $V = q/C$:

$$W_{\text{ext}} = \int_0^q \frac{q'}{C} dq' = \frac{1}{2C} q^2 = \frac{1}{2} C V^2. \quad (5.17)$$

Il condensatore carico immagazzina pertanto un'energia potenziale elettrostatica

$$E_p = W_{\text{ext}} = \frac{1}{2C} q^2 = \frac{1}{2} C V^2. \quad (5.18)$$

Si noti che al lavoro positivo di carica corrisponde un lavoro negativo del campo elettrico: $W_{\text{ext}} = -W_{\text{campo}}$; il campo elettrico ha infatti verso opposto allo spostamento.

I condensatori – con forme varie, non necessariamente a facce piane parallele – sono correntemente utilizzati nei circuiti elettrici come deposito temporaneo di energia.

Il condensatore svolge nei circuiti elettrici lo stesso ruolo che la molla svolge nei sistemi meccanici. Anche il calcolo del lavoro e l'espressione dell'energia potenziale sono analoghi (si riveda il § 3.7): per il condensatore $E_p = q^2/2C$, per la molla $E_p = kx^2/2$.

5.3.5 Dielettrici e loro ruolo nei condensatori

Come è possibile aumentare la capacità di un condensatore, in modo da aumentare l'energia potenziale immagazzinata a parità di differenza di potenziale? Per un condensatore a facce piane parallele nel vuoto (Fig. 5.5, a sinistra), la capacità $C = \epsilon_0 A/s$ cresce se cresce la superficie A o diminuisce la distanza s tra le armature. La capacità può essere incrementata anche sostituendo il vuoto tra le armature con un materiale isolante (dielettrico).

Un dielettrico non conduce l'elettricità, in quanto gli elettroni non sono liberi di muoversi. Il campo elettrico \vec{E}_0 creato dalle armature cariche del condensatore provoca comunque un effetto di *polarizzazione* del dielettrico, dovuto a due possibili cause:

1. Il campo esterno \vec{E}_0 deforma la nube elettronica degli atomi, per cui il centro di massa della carica negativa non coincide più con il nucleo positivo; ogni atomo diviene perciò un piccolo dipolo elettrico, orientato nel verso del campo esterno \vec{E}_0 (Fig. 5.5, al centro).
2. Se nel dielettrico sono presenti molecole polari (cioè molecole in cui i centri di massa delle cariche positive e negative sono comunque separati e formano un dipolo elettrico permanente), si presenta un ulteriore effetto di polarizzazione. In assenza di campo elettrico le molecole sono orientate in modo casuale; il campo esterno \vec{E}_0 tende ad allineare parzialmente le molecole polari.

Entrambi i fenomeni hanno come effetto l'accumulo di una carica netta positiva sulla faccia del dielettrico vicina all'armatura negativa del condensatore e di una uguale carica netta negativa sulla faccia del dielettrico vicina all'armatura positiva del condensatore.

Le due cariche sulle facce opposte del dielettrico creano all'interno del dielettrico un campo di polarizzazione \vec{E}_p di verso opposto al campo esterno \vec{E}_0 (Fig. 5.5, a destra). Il campo risultante $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p$ ha modulo $E = E_0 - E_p$, minore del modulo di E_0 . Il rapporto adimensionale

$$\epsilon_r = E_0/E \quad (5.19)$$

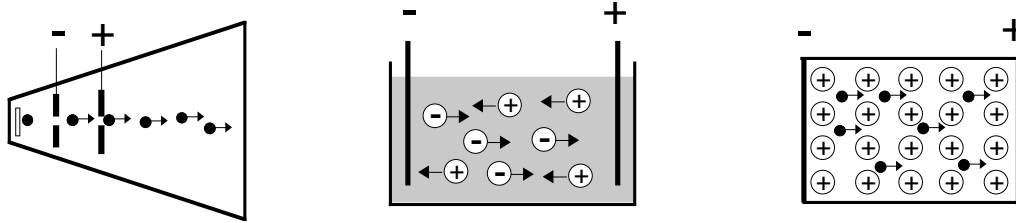


Figura 5.6: Rappresentazione schematica (non in scala !) di cariche in movimento. A sinistra: elettroni in un tubo a raggi catodici sotto vuoto. Al centro: ioni positivi e negativi in una cella elettrolitica. A destra: elettroni in un reticolo cristallino. Nei tre esempi, il campo elettrico è sempre diretto da destra verso sinistra.

è detto *costante dielettrica relativa*.

Il campo elettrico e la differenza di potenziale in presenza del dielettrico sono pertanto legati al campo elettrico e alla differenza di potenziale nel vuoto dalle relazioni

$$E = E_0/\epsilon_r, \quad V = V_0/\epsilon_r. \quad (5.20)$$

A parità di carica q sulle armature del condensatore, deve essere

$$q = \underbrace{C_0 V_0}_{\text{nel vuoto}} = \underbrace{CV}_{\text{con dielettrico}}. \quad (5.21)$$

L'equazione (5.21) è soddisfatta se la capacità del dielettrico vale

$$C = \epsilon_r C_0 = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{s}. \quad (5.22)$$

Poiché la costante dielettrica relativa ϵ_r è maggiore di uno, la presenza del dielettrico aumenta la capacità del condensatore.

5.4 Cariche in movimento: circuiti elettrici

5.4.1 Corrente elettrica

Una carica elettrica libera di muoversi nel vuoto, se immersa in un campo elettrico \vec{E} , subisce una forza $\vec{F}_e = q\vec{E}$ che la accelera. Una volta cessato l'effetto del campo elettrico, in assenza di altre forze, la carica procede di moto rettilineo ed uniforme.

Esempio: Il tubo a raggi catodici (CRT) di un televisore o di un terminale video è sigillato sotto vuoto (Fig. 5.6, a sinistra). Gli elettroni, emessi da un filamento riscaldato, vengono accelerati da un campo elettrico che si stabilisce tra due elettrodi a diverso potenziale. Una volta accelerati dal campo, gli elettroni viaggiano, in assenza di campo elettrico, a velocità costante verso lo schermo di visualizzazione.

Nei sistemi materiali, le cariche mobili non si muovono nel vuoto, e sono soggette anche a forze che si oppongono al moto, in forme assimilabili all'attrito nei fluidi; la forza $\vec{F}_e = q\vec{E}$ indotta dal campo elettrico serve a equilibrare le forze che si oppongono al moto, cosicché il moto risultante delle cariche elettriche è caratterizzato da una velocità media costante.

Esempio: In una soluzione elettrolitica sono presenti ioni positivi e ioni negativi (Fig. 5.6, al centro). In presenza di un campo elettrico, gli ioni positivi e negativi si muovono in versi opposti. Gli urti con le molecole del solvente fanno sì che gli ioni si muovano con velocità media costante.

Le cariche elettriche in movimento formano una *corrente elettrica*. L'intensità di corrente I misura la carica che attraversa una data superficie, ad esempio la sezione di un conduttore, nell'unità di

tempo. Per tener conto delle eventuali variazioni nel tempo del passaggio di carica, l'intensità di corrente è definita dalla relazione differenziale

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (5.23)$$

Per motivi storici, il verso positivo della corrente è associato al moto delle cariche positive. L'intensità di corrente elettrica si misura in ampere (A): $1 \text{ A} = 1 \text{ C}/1 \text{ s}$.

In molti casi, ad esempio nei *conduttori metallici*, le cariche che si possono muovere e possono dare origine ad una corrente elettrica sono solo gli elettroni (con carica negativa) (Fig. 5.6, a destra). Il verso convenzionale della corrente è pertanto opposto al verso del moto reale degli elettroni.

5.4.2 Generatori di forza elettromotrice

Il campo elettrico \vec{E} che mette in movimento le cariche è prodotto da una differenza di potenziale V , applicata a due estremi del volume spaziale sede della corrente elettrica: ad esempio gli elettrodi di accelerazione di un CRT, gli elettrodi di una cella elettrolitica, gli estremi di un filo conduttore metallico, i terminali di un dispositivo elettronico.

La differenza di potenziale è ottenuta mediante opportuni generatori. Una differenza di potenziale costante nel tempo ("continua") è fornita da una pila o da una batteria di pile (ricaricabili o no). Una differenza di potenziale variabile periodicamente nel tempo ("alternata") è fornita da un alternatore.

L'energia che il generatore fornisce all'unità di carica elettrica è detta *forza elettromotrice*, *f.e.m.* \mathcal{E} . La *potenza* erogata da un generatore, cioè il lavoro nell'unità di tempo, è

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\mathcal{E} dq}{dt} = \mathcal{E} I, \quad (5.24)$$

cioè pari al prodotto della f.e.m. \mathcal{E} per l'intensità di corrente I .

5.4.3 Resistenza elettrica

Abbiamo già osservato che nei sistemi materiali le cariche, accelerate da un campo elettrico, sono soggette anche a forze assimilabili ad una forma di attrito. La forza dovuta al campo elettrico serve in media a vincere le forze d'attrito, per cui le cariche finiscono per muoversi con velocità media costante. L'effetto di una differenza di potenziale costante applicata ad un sistema materiale è perciò una corrente di intensità costante.

Si chiama *resistenza elettrica* R di un corpo il rapporto tra la differenza di potenziale applicata ai suoi estremi e l'intensità di corrente che vi si instaura:

$$R = V/I. \quad (5.25)$$

La resistenza si misura in ohm (Ω): $1 \Omega = 1 \text{ V}/1 \text{ A}$.

Nei metalli, la resistenza R è costante per un largo intervallo di valori di differenza di potenziale (e di corrente). Questo fatto costituisce la *legge di Ohm*.

La resistenza elettrica di un corpo dipende dal materiale di cui è fatto e dalle sue dimensioni geometriche. Per un corpo di sezione A e lunghezza ℓ , la resistenza elettrica può essere espressa come

$$R = \rho \frac{\ell}{A}. \quad (5.26)$$

La resistenza è proporzionale alla lunghezza del conduttore e inversamente proporzionale alla sua sezione. Il coefficiente ρ è detto *resistività*, e dipende dal tipo di materiale, nonché dalla temperatura. È facile rendersi conto che la resistività si misura in $\Omega \text{ m}$. L'inverso della resistività è detto *conducibilità*, $\sigma = 1/\rho$.

In Tab. 5.2 sono riportati i valori di resistività di alcuni materiali solidi. Come si può vedere, le differenze coprono molti ordini di grandezza. La tabella mette bene in evidenza la differenza, in termini di valori di resistività, tra conduttori, semiconduttori ed isolanti.

Tabella 5.2: Valori di resistività elettrica, espressi in $\Omega \text{ m}$, per alcuni materiali.

	ρ ($\Omega \text{ m}$)	
Argento (Ag)	1.6×10^{-8}	conduttori
Rame (Cu)	1.7×10^{-8}	
Ferro (Fe)	9.7×10^{-8}	
Germanio (Ge) puro	0.5	semiconduttori
Silicio (Si) puro	2.5×10^3	
Vetro	$10^{10} - 10^{14}$	isolanti
Teflon	10^{16}	

Un'importante differenza tra solidi conduttori e semiconduttori riguarda la dipendenza della resistività dalla temperatura:

- Nei conduttori, la resistività cresce con la temperatura. Il numero di elettroni mobili nei conduttori non dipende dalla temperatura; al crescere della temperatura cresce però l'intensità dell'agitazione termica degli ioni positivi intorno alle loro posizioni di equilibrio; questo moto disordinato degli ioni costituisce un ostacolo al moto ordinato degli elettroni.
- Nei semiconduttori, la resistività diminuisce al crescere della temperatura; al crescere della temperatura cresce infatti il numero di elettroni che possono muoversi e quindi contribuire alla corrente elettrica. L'effetto positivo della crescita del numero di elettroni mobili prevale sull'effetto negativo dovuto all'agitazione termica degli ioni.

5.4.4 Potenza dissipata; effetto Joule

Consideriamo un generatore connesso ad un circuito esterno. Il generatore eroga una forza elettromotrice \mathcal{E} , corrispondente all'energia per unità di carica.

Per muovere una carica infinitesima positiva dq lungo il circuito il generatore deve svolgere un lavoro

$$dW = \mathcal{E} dq = dW_{\text{int}} + dW_{\text{ext}}. \quad (5.27)$$

Nell'ultimo passaggio di questa equazione si sono separati due contributi: il lavoro dW_{int} fatto all'interno del generatore stesso e il lavoro dW_{ext} fatto sul circuito esterno al generatore. Il lavoro esterno è collegato alla differenza di potenziale V misurata sui terminali d'uscita dal generatore dalla relazione

$$dW_{\text{ext}} = V dq. \quad (5.28)$$

Anche la potenza totale erogata dal generatore può essere decomposta nella potenza dissipata all'interno del generatore e nella potenza disponibile all'esterno:

$$P = \frac{dW}{dt} = \mathcal{E} I = P_{\text{int}} + P_{\text{ext}} = P_{\text{int}} + VI. \quad (5.29)$$

La potenza P_{ext} può essere utilizzata per far funzionare un motore, ad esempio la ventola di raffreddamento di un computer, oppure per ricaricare una batteria. Parte della potenza viene utilizzata anche per vincere gli attriti interni dei conduttori. In tal caso, la potenza fornita dal generatore viene dissipata in progressiva generazione di calore (*effetto Joule*).

Consideriamo, per semplicità, un circuito puramente resistivo, in cui cioè tutta la potenza erogata dal generatore è utilizzata per vincere la resistenza. Ricordando che $V = RI$, è facile vedere che la potenza dissipata su un tratto di conduttore di resistenza R è

$$P = VI = V^2/R = I^2R. \quad (5.30)$$

Ogni circuito ha una resistenza (*resistenza diffusa*). In molti casi, conduttori con resistenza opportunamente calibrata (*resistori*) vengono inseriti nei circuiti elettrici, allo scopo di dissipare

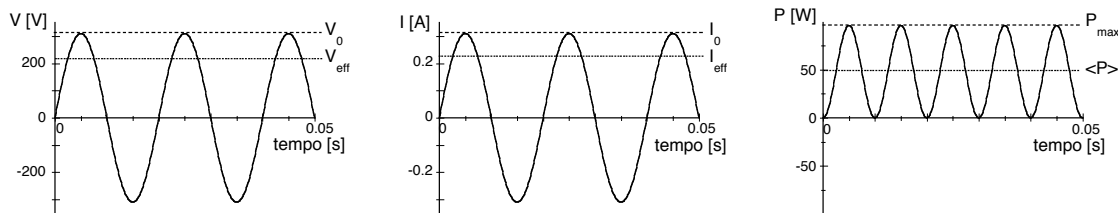


Figura 5.7: Una differenza di potenziale alternata $V(t)$ con frequenza $\nu = 50$ Hz e $V_{\text{eff}} = 220$ V (a sinistra) viene applicata ad un circuito con resistenza $R = 1$ k Ω ; la corrente risultante $I(t)$ è rappresentata al centro. A sinistra la potenza dissipata $P = VI$.

potenza per generare calore (ad esempio nei fornelli) o luce (ad esempio nelle lampadine), oppure per ottenere valori ben definiti di potenziale elettrico V_i nei diversi punti del circuito.

5.4.5 Circuiti in corrente alternata

Abbiamo finora considerato generatori che forniscono differenze di potenziale costanti nel tempo, come le pile. In questo caso i circuiti collegati sono sede di correnti continue (c.c).

Le reti di distribuzione dell'energia elettrica forniscono generalmente una differenza di potenziale V variabile sinusoidalmente nel tempo (Fig. 5.7, a sinistra), cui corrisponde una corrente I nel circuito variabile nel tempo pure sinusoidalmente (corrente alternata, c.a.):

$$V = V_0 \sin(2\pi\nu t), \quad I = I_0 \sin(2\pi\nu t), \quad (5.31)$$

dove ν è la frequenza. In Europa la frequenza è $\nu = 50$ Hz, e l'ampiezza della differenza di potenziale è $V_0 \simeq 310$ V.

Anche la potenza erogata dipende dal tempo (Fig. 5.7, a destra):

$$P = VI = V_0 I_0 \sin^2(2\pi\nu t). \quad (5.32)$$

In genere ci si riferisce alla potenza *media* $\langle P \rangle$ erogata dal generatore o assorbita da un utilizzatore. Tenendo conto che il valor medio $\langle \sin^2 x \rangle$ calcolato su un numero intero di periodi è uguale ad $1/2$, si ha

$$\langle P \rangle = V_0 I_0 \langle \sin^2(2\pi\nu t) \rangle = \frac{1}{2} V_0 I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \frac{I_0}{\sqrt{2}}. \quad (5.33)$$

Le grandezze $V_0/\sqrt{2}$ e $I_0/\sqrt{2}$ vengono dette, rispettivamente, differenza di potenziale efficace V_{eff} e corrente efficace I_{eff} . In Europa tipicamente $V_{\text{eff}} = 220$ V.

Si ha quindi:

$$\langle P \rangle = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} = V_{\text{eff}}^2/R = R I_{\text{eff}}^2. \quad (5.34)$$

5.5 Cariche in movimento: campo magnetico

Nei paragrafi precedenti ci siamo prevalentemente occupati dell'interazione tra cariche elettriche in quiete (elettrostatica). Vogliamo ora occuparci dell'interazione tra cariche elettriche in movimento. Per introdurre l'argomento, facciamo alcuni esempi.

- Come abbiamo già visto, tra due cariche in quiete si sviluppa una forza d'interazione, attrattiva o repulsiva, diretta lungo la linea congiungente (Fig. 5.1, a sinistra). L'effetto della singola carica può venire descritto per mezzo del campo elettrico \vec{E} (Fig. 5.1, a destra).
- Consideriamo ora due fili conduttori paralleli, *non* percorsi da corrente (Fig. 5.8, a sinistra). I due fili sono elettricamente neutri: le cariche negative degli elettroni sono compensate dalle cariche positive degli ioni. Non ci sono forze elettrostatiche tra i due fili.

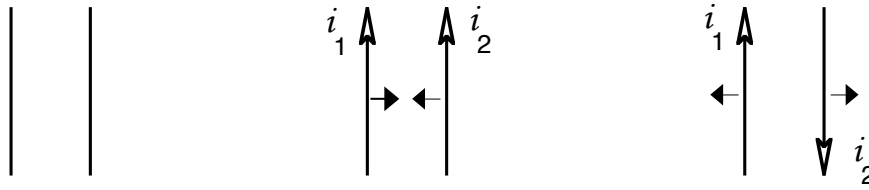


Figura 5.8: Due fili conduttori paralleli: senza corrente (a sinistra) e percorsi da correnti concordi (al centro) e discordi (a destra).

- Facciamo ora scorrere nei due fili paralleli (di lunghezza ℓ posti a distanza s) due correnti, di intensità rispettivamente I_1 e I_2 . La neutralità elettrica è ancora rispettata, non ci sono quindi forze elettrostatiche. Si verifica però sperimentalmente che tra i due fili si esercita una forza, direttamente proporzionale alla lunghezza e inversamente proporzionale alla distanza:

$$F \propto \frac{\ell I_1 I_2}{s}; \quad (5.35)$$

la forza è

- attrattiva se le correnti sono concordi (Fig. 5.8 al centro)
- repulsiva se le forze sono discordi (Fig. 5.8 a destra)

L'ultimo esempio, relativo a due fili paralleli percorsi da corrente, è un caso particolare di un fenomeno molto più generale: qualsiasi carica in moto esercita una forza (non elettrostatica) su qualsiasi altra carica in moto.

5.5.1 Campo elettrico \vec{E} e campo d'induzione magnetica \vec{B}

Come abbiamo visto al §5.2, la forza d'interazione elettrostatica tra due cariche puntiformi in quiete agisce sempre lungo la loro linea congiungente, e può quindi essere agevolmente espressa in forma analitica (legge di Coulomb).

La forza d'interazione tra cariche in movimento non agisce in genere lungo la linea congiungente, ed è difficile esprimerla in modo analitico semplice. Il problema della determinazione della forza tra cariche in movimento viene formalmente semplificato scomponendolo in due passi logici, mediante l'introduzione del *campo magnetico* \vec{B} , in modo analogo a quanto già fatto con il campo elettrico \vec{E} in elettrostatica.

Utilizzando il concetto di campo (elettrico o magnetico), i due passi sono:

a) Per l'interazione elettrostatica tra due cariche in quiete (§5.2):

1. una prima carica q_1 genera un campo elettrico \vec{E} nello spazio circostante;
2. il campo elettrico \vec{E} esercita una forza $\vec{F} = q_2 \vec{E}$ su una seconda carica q_2 .

b) Se le cariche sono in movimento:

1. una prima carica q_1 in moto genera un campo d'induzione magnetica \vec{B} nello spazio circostante;
2. il campo d'induzione magnetica \vec{B} esercita una forza su una seconda carica q_2 in moto.

Per l'elettrostatica, il processo a due passi porta immediatamente alla legge di Coulomb, come abbiamo visto nei paragrafi precedenti. Analizzeremo ora separatamente i due passi nel caso dell'interazione tra due cariche in movimento.

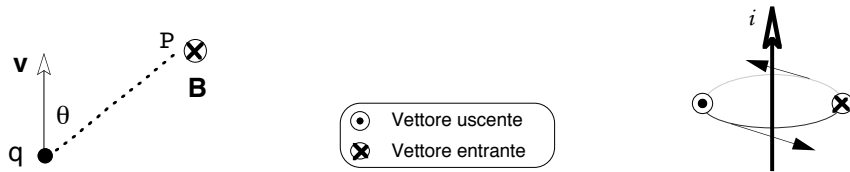


Figura 5.9: Campo d'induzione magnetica \vec{B} generato da una carica in movimento (a sinistra) e da un filo rettilineo percorso da una corrente i (a destra).

5.5.2 Campo \vec{B} generato da una carica in movimento

Consideriamo una carica positiva q_1 in moto con velocità \vec{v}_1 (piccola rispetto alla velocità della luce c). Ci poniamo in un punto P posto a distanza r dalla carica, e sia θ l'angolo sotto cui il vettore \vec{v}_1 è visto dal punto P (Fig. 5.9, a sinistra). Il vettore campo magnetico \vec{B} è definito nel punto P nel seguente modo:

- direzione perpendicolare al piano formato dal punto P e dal vettore \vec{v}_1 ;
- verso corrispondente all'avanzamento di una vite che ruota in modo da dirigere il vettore \vec{v}_1 verso il punto P (regola del cavatappi);
- modulo pari a

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 v_1 \sin \theta}{r^2}, \quad (5.36)$$

dove μ_0 è una costante detta *permeabilità magnetica del vuoto*.

Direzione, verso e intensità del vettore \vec{B} possono venire espresse in modo sintetico mediante il formalismo del prodotto vettoriale:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} q \vec{v} \times \vec{r}. \quad (5.37)$$

Il campo \vec{B} è dunque nullo se il punto P si trova lungo la direzione del moto della carica ($\theta = 0$), e diminuisce inversamente al quadrato della distanza r . Se la carica è negativa, il verso del campo si inverte. Definiremo più avanti l'unità di misura del campo B e vedremo quindi quali sono le dimensioni e il valore numerico della costante μ_0 .

Campo \vec{B} generato da una corrente rettilinea

Come prima importante applicazione, consideriamo il caso di un filo conduttore rettilineo percorso da una corrente di intensità i , e determiniamo il campo \vec{B} nello spazio circostante in funzione della distanza r dal filo (Fig. 5.9, a destra). Il campo \vec{B} nel generico punto P è la somma dei campi generati da tutte le cariche in moto nel filo. Se la lunghezza del filo è molto grande rispetto alle distanze r considerate (idealmente, se il filo ha lunghezza infinita), si dimostra che il campo \vec{B}

- è perpendicolare al piano individuato dal conduttore rettilineo e dal punto P ;
- ha verso determinato dalla regola del cavatappi: assimilando la rotazione del vettore velocità delle cariche verso il punto P alla rotazione di un cavatappi, il verso di \vec{B} corrisponde al verso di avanzamento del cavatappi;
- ha modulo

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}. \quad (5.38)$$

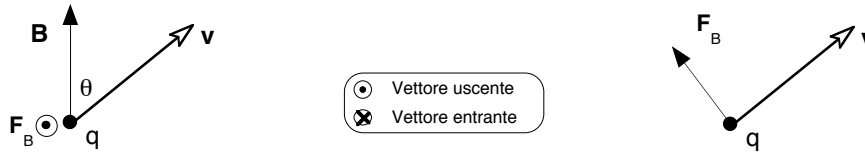


Figura 5.10: Forze \vec{F}_B esercitata dal campo d'induzione magnetica \vec{B} su una carica q in movimento a velocità \vec{v} (a sinistra). La forza \vec{F}_B è sempre perpendicolare alla velocità \vec{v} (a destra).

5.5.3 Forza su una carica in movimento

Abbiamo visto sopra come calcolare il campo \vec{B} generato da cariche in movimento. Affrontiamo ora il secondo passo, cioè il calcolo della forza \vec{F}_B che il campo \vec{B} esercita su una carica q_2 in movimento. Si osserva sperimentalmente che

- la forza è nulla, $\vec{F}_B = 0$, se la velocità è nulla, $\vec{v}_2 = 0$ (carica in quiete);
- la forza è nulla, $\vec{F}_B = 0$, se la velocità \vec{v}_2 è parallela al campo, $\vec{B} \parallel \vec{v}$;
- la forza $\vec{F}_B = 0$ ha intensità massima se la velocità \vec{v}_2 è perpendicolare al campo, $\vec{v}_2 \perp \vec{B}$.

Più specificamente, si trova che la forza subita da una carica q_2 in moto con velocità \vec{v}_2 in un campo di induzione magnetica \vec{B} (Fig. 5.10, a sinistra)

- ha direzione perpendicolare al piano individuato dai vettori \vec{B} e \vec{v}_2 ;
- ha verso determinato dalla regola del cavatappi: assimilando la rotazione del vettore \vec{v}_2 verso il vettore \vec{B} alla rotazione di un cavatappi, il verso della forza \vec{F}_B corrisponde al verso di avanzamento del cavatappi;
- ha valore numerico

$$F_B = q_2 v_2 B \sin \theta \quad (5.39)$$

(positivo o negativo a seconda del segno della carica).

Utilizzando il formalismo del prodotto vettoriale si ottiene un'espressione sintetica:

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}. \quad (5.40)$$

Si noti che la forza \vec{F}_B , essendo sempre perpendicolare alla velocità e quindi allo spostamento istantaneo, non fa lavoro (Fig. 5.10, a destra).

Unità di misura del campo \vec{B}

Siamo ora in grado di definire l'unità di misura dell'induzione magnetica B . Invertendo l'eq. (5.39) si ottiene

$$B = \frac{F_B}{qv \sin \theta}; \quad (5.41)$$

l'unità di misura dell'induzione B è il tesla (T), corrispondente all'induzione che induce una forza di 1 N sulla carica di 1 C in moto alla velocità di 1 m/s: $1 \text{ T} = 1 \text{ N s C}^{-1} \text{ m}^{-1}$.

La permeabilità magnetica del vuoto vale $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T m/A}$.

5.5.4 Alcuni casi notevoli

Forza tra conduttori paralleli

Possiamo usare i concetti introdotti nei paragrafi precedenti per determinare quantitativamente la forza di interazione tra due fili paralleli a distanza R percorsi dalle correnti I_1 e I_2 . Eseguiamo il calcolo in due passi.

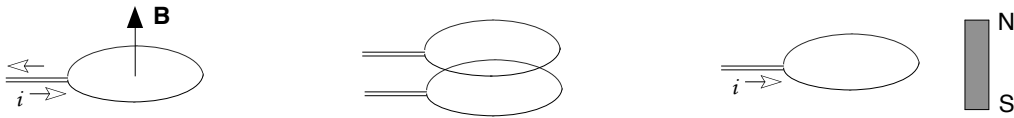


Figura 5.11: A sinistra: campo \vec{B} al centro di una spira percorsa da corrente i . Al centro: due spire parallele percorse da corrente si attirano o si respingono a seconda che la corrente sia concorde o discorde in verso. A destra: una spira percorsa da corrente si comporta come un magnete naturale.

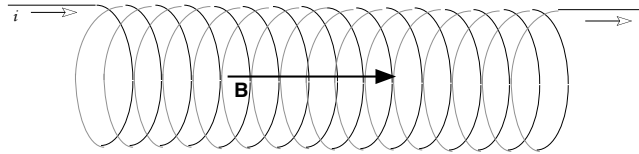


Figura 5.12: Un solenoide percorso da corrente i .

1. Il campo d'induzione magnetica prodotto in un punto del conduttore 2 dalla corrente I_1 che scorre nel conduttore 1 è perpendicolare al piano che contiene i due conduttori, ed ha valore numerico

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R} \quad (5.42)$$

2. la forza che il campo \vec{B} esercita sulle cariche in moto nel conduttore 2 giace nel piano dei due conduttori, con direzione però perpendicolare; per un elemento di carica dq la forza vale $dF_B = vB dq = I_2 B ds$, dove ds è un tratto infinitesimo del conduttore; la forza totale è convenientemente espressa per unità di lunghezza:

$$\frac{F_B}{\ell} = \frac{dF_B}{ds} = I_2 B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{R}. \quad (5.43)$$

Usando la regola del cavatappi in entrambi i passi del procedimento, è facile vedere che la forza è attrattiva se le correnti sono concordi, è repulsiva se le correnti sono discordi.

Spire, bobine e dipoli magnetici

Un altro esempio interessante di applicazione dei concetti relativi all'interazione tra cariche in movimento è rappresentato dalle *spire*, cioè circuiti che formano una figura geometrica chiusa, tipicamente una circonferenza. Il campo d'induzione magnetica al centro di una spira circolare di raggio R percorsa da una corrente I (Fig. 5.11, a sinistra) è perpendicolare al piano della spira, e vale

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}. \quad (5.44)$$

Negli altri punti dello spazio il campo \vec{B} ha direzioni e intensità diverse.

Un avvolgimento costituito da molte spire è detto una *bobina*. Il campo \vec{B} risulta dalla somma dei campi prodotti da ogni spira.

Due spire o due bobine parallele percorse da corrente si attirano o si respingono a seconda che le correnti sono concordi oppure discordi in verso (Fig. 5.11, al centro).

L'interazione tra due spire percorse da corrente è analoga all'interazione tra due magneti naturali (calamite). I magneti presentano un polo Nord e un polo Sud. Poli di ugual tipo si respingono, poli di tipo diverso si attraggono. Una spira percorsa da corrente si comporta come una barretta magnetica posta perpendicolarmente al piano della spira (Fig. 5.11, a destra).



Figura 5.13: Due spire parallele. La spira a può essere collegata in serie a un generatore e percorsa da corrente i_a . La spira b è collegata in serie ad un misuratore di corrente (amperometro).

Solenoidi

Un *solenoid*e è una bobina di forma cilindrica formata da una serie di N spire circolari realizzate con un unico filo di materiale conduttore e percorse dalla stessa corrente (Fig. 5.12). Se la lunghezza del solenoide è ℓ , indicheremo con $n = N/\ell$ il numero di spire per unità di lunghezza.

Se la lunghezza del solenoide è grande rispetto al raggio, si può dimostrare che nella regione interna il campo d'induzione magnetica \vec{B} è diretto longitudinalmente ed ha intensità uniforme

$$B = \mu_0 n I. \quad (5.45)$$

Il solenoide è l'analogo, per i campi magnetici, del condensatore piano per i campi elettrici. Il solenoide consente di creare un campo \vec{B} uniforme in una regione limitata dello spazio, il condensatore piano consente di creare un campo \vec{E} uniforme in una regione limitata dello spazio.

5.6 L'induzione elettromagnetica

Abbiamo visto finora come una carica in quiete agisca su un'altra carica in quiete mediante un campo elettrico \vec{E} , e come una carica in movimento agisca su un'altra carica in movimento mediante un campo d'induzione magnetica \vec{B} . Vogliamo ora fare un passo avanti, e studiare il fenomeno dell'induzione elettromagnetica: una variazione del campo \vec{B} provoca una variazione del campo \vec{E} e viceversa. Il fenomeno ha notevoli implicazioni di natura tecnologica. Affronteremo l'argomento in modo elementare, e senza pretese di completezza.

5.6.1 Un primo semplice esperimento

Consideriamo due spire uguali disposte in parallelo. La spira A è collegata in serie ad una pila mediante un interruttore; quando l'interruttore è chiuso, la spira a è percorsa da una corrente I_a . La spira b è invece collegata in serie con un amperometro, cioè uno strumento in grado di misurare la corrente elettrica (Fig. 5.13).

Consideriamo cosa si verifica sperimentalmente in alcune situazioni particolari:

1. L'interruttore nel circuito A è aperto (Fig. 5.13, a sinistra). Nella spira a non circola corrente ($I_a = 0$). Anche nella spira B non circola corrente ($I_b = 0$): l'amperometro segna zero.
2. L'interruttore nel circuito A è chiuso (Fig. 5.13, a destra). Nella spira a circola una corrente I_a costante, che genera un campo di induzione magnetica \vec{B} nello spazio circostante. Nella spira b non circola corrente ($I_b = 0$): l'amperometro segna ancora zero.
3. L'interruttore del circuito a viene ripetutamente chiuso e aperto. Nella spira a la corrente I_a varia ad ogni chiusura e apertura dell'interruttore; corrispondentemente varia il campo d'induzione magnetica \vec{B} . Se osserviamo l'amperometro collegato alla spira b , vediamo che la spira b viene percorsa da una corrente I_b di breve durata ogni qual volta la corrente I_a e il campo \vec{B} subiscono una variazione.

4. L'interruttore rimane chiuso e la spira a è percorsa da una corrente costante I_a . Non c'è corrente nella spira b . Se però avviciniamo (o allontaniamo) le due spire una dall'altra, osserviamo che durante il movimento la spira b è percorsa da una corrente I_b . Possiamo anche osservare che durante la variazione della distanza tra le spire cambia il valore del campo \vec{B} in corrispondenza della spira b .
5. L'interruttore rimane chiuso e la spira a è percorsa da una corrente costante I_a . Non c'è corrente nella spira b . Se però ruotiamo la spira b intorno ad un asse contenuto nel suo piano, in modo da modificare la sua orientazione rispetto alla spira a , osserviamo che durante la rotazione la spira b è percorsa da una corrente I_b .

Gli esperimenti descritti sopra si interpretano qualitativamente dicendo che nella spira b viene *indotta* una corrente elettrica quando il campo magnetico \vec{B} che attraversa la superficie della spira subisce una variazione.

5.6.2 Flusso del vettore \vec{B}

Per dare una descrizione quantitativa del fenomeno dell'induzione elettromagnetica, è necessario misurare il campo magnetico che attraversa la spira. A questo scopo si introduce il concetto di *flusso* del vettore \vec{B} attraverso una superficie.

Partiamo da un esempio semplice: un campo di induzione \vec{B} uniforme nello spazio ed una superficie piana A perpendicolare alla direzione del campo (si pensi alla superficie racchiusa da una spira). In questo caso il flusso del vettore \vec{B} attraverso la superficie è una grandezza scalare definita semplicemente come il prodotto del modulo del campo magnetico per la superficie

$$\Phi_B = B A. \quad (5.46)$$

Se la superficie non è perpendicolare al campo, si dovrà tener conto della componente B_n di \vec{B} perpendicolare alla superficie: $\Phi_B = B_n A$; in particolare, se la superficie è parallela a \vec{B} , $B_n = 0$ e il flusso è nullo, $\Phi_B = 0$.

Infine, se il campo \vec{B} non è uniforme, si dovrà tener conto del valore della sua componente normale per ogni elemento infinitesimo della superficie, e calcolare il flusso totale mediante integrazione.

Qui e nel seguito ci limiteremo a considerare il caso semplice del campo \vec{B} uniforme.

L'unità di misura del flusso di induzione magnetica, nel Sistema Internazionale, è il weber: $1 \text{ Wb} = 1 \text{ T m}^2$.

5.6.3 La forza elettromotrice indotta

Una volta introdotto il concetto di flusso Φ_B , è possibile dare un'interpretazione quantitativa del fenomeno dell'induzione elettromagnetica, di cui abbiamo visto sopra alcuni esempi.

Sperimentalmente si osserva sempre che una variazione del flusso Φ_B attraverso la superficie definita da un circuito (flusso concatenato con il circuito) produce una corrente elettrica nel circuito stesso. La variazione del flusso Φ_B può avvenire per:

- variazione del campo \vec{B} ,
- variazione della posizione del circuito in un campo \vec{B} non uniforme,
- variazione della forma del circuito,
- variazione dell'orientazione del circuito rispetto al campo \vec{B} .

Per mantenere in circolazione una corrente in un circuito è necessario fornire energia; come abbiamo già visto, l'energia per unità di carica fornita da un generatore è detta *forza elettro-motrice* \mathcal{E} . Nel caso dell'induzione elettromagnetica, a seguito della variazione del flusso del campo \vec{B} , nel circuito si instaura una *f.e.m.* \mathcal{E} . La connessione tra forza elettro-motrice e variazione di flusso è la seguente

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (5.47)$$

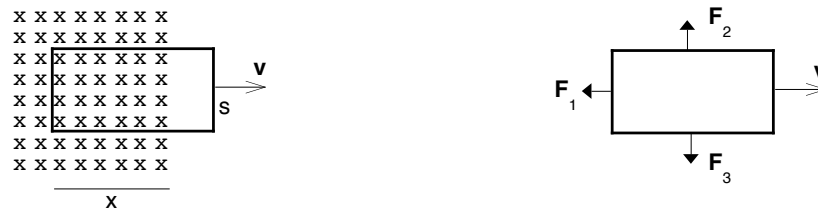


Figura 5.14: Una spira rettangolare chiusa è parzialmente immersa in un campo d'induzione \vec{B} uniforme e perpendicolare al piano della spira; il verso di \vec{B} è entrante (a sinistra). Quando la spira viene estratta dal campo magnetico, si sviluppano le forze $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ (a destra).

La forza elettro-motrice è cioè proporzionale alla velocità di variazione del flusso del campo \vec{B} . Il segno meno nella (5.47) indica che la *f.e.m.* indotta si oppone alla variazione del flusso di \vec{B} : la corrente che si instaura nel circuito genera cioè un suo proprio campo magnetico, di verso opposto a quello responsabile dell'induzione.

La relazione tra forza elettromotrice indotta e corrente indotta in un circuito di resistenza R è

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}. \quad (5.48)$$

È utile descrivere l'induzione elettromagnetica da un altro punto di vista. La *f.e.m.* indotta genera un campo elettrico \vec{E} lungo il circuito, che a sua volta è responsabile del movimento delle cariche elettriche e quindi della corrente I . Ricordiamo che il lavoro elementare del campo elettrico sulla carica q_0 per uno spostamento ds è $dW = q_0 E ds$. La *f.e.m.* indotta rappresenta il lavoro totale necessario per far percorrere all'unità di carica il circuito chiuso della spira, cioè

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}. \quad (5.49)$$

Il simbolo \oint indica che l'integrale per calcolare il lavoro deve essere fatto lungo il percorso chiuso del circuito.

È importante fare a questo punto due osservazioni:

- In un campo \vec{E} puramente elettrostatico, l'integrale $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$ sarebbe nullo, perché il campo elettrostatico è conservativo: non si genera spontaneamente una corrente in un conduttore chiuso immerso in un campo elettrostatico.
- L'equazione (5.49) vale anche se il circuito non ha consistenza materiale, come un filo conduttore, ma è una qualunque linea chiusa nello spazio (anche vuoto). Ciò significa che in generale la variazione di un campo magnetico crea un campo elettrico. È interessante notare che si verifica anche la situazione simmetrica: la variazione di un campo elettrico genera un campo magnetico.

5.6.4 Esempi

Facciamo due esempi di induzione elettromagnetica, il primo particolarmente semplice e intuitivo, il secondo di notevole rilevanza tecnologica.

Esempio 1

Per il primo esempio, facciamo riferimento alla Fig. 5.14. Un campo d'induzione magnetica \vec{B} uniforme è realizzato in una regione ben definita dello spazio (le x nella figura). Una spira rettangolare chiusa è parzialmente immersa nel campo, disposta in un piano perpendicolare a \vec{B}

(in figura, il piano del foglio). Se indichiamo con $A = sx$ l'area della spira attraversata dal campo, il flusso di \vec{B} è

$$\Phi_B = BA = Bsx. \quad (5.50)$$

Se ora estraiamo la spira dal campo, con velocità costante \vec{v} verso destra, il flusso varia nel tempo, dando origine ad una *f.e.m.*:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -B\frac{dA}{dt} = -Bsv. \quad (5.51)$$

Alla *f.e.m.* corrisponde una corrente i che scorre in *verso orario*. Per convincersene, si può ragionare nel seguente modo. Le cariche libere della spira (elettroni) sono costrette a muoversi con velocità \vec{v} verso destra. Come già sappiamo, una carica in moto in un campo \vec{B} subisce una forza perpendicolare al piano individuato da \vec{B} e \vec{v} . È facile verificare che questa forza, esercitata sugli elettroni, induce una corrente di verso orario.

La corrente indotta corrisponde a cariche in moto lungo il conduttore con velocità media costante. Applicando ancora la formula che dà la forza in funzione della velocità e del campo magnetico, si può verificare che i tre lati della spira immersi nel campo magnetico subiscono le forze mostrate in Fig. 5.14 (a destra). Le forze \vec{F}_2 e \vec{F}_3 si equilibrano. La forza \vec{F}_1 non è equilibrata, e si oppone al moto verso destra della spira.

In altri termini, per estrarre la spira dal campo \vec{B} è necessario esercitare una forza e spendere dell'energia. L'energia viene dissipata in calore per effetto Joule.

Esempio 2: generazione di forze elettromotrici alternate

Il flusso del campo \vec{B} concatenato con una spira può essere variato in diversi modi, oltre a quello esplorato nell'Esempio 1 (estrazione di una spira dal campo magnetico).

Un caso molto importante è rappresentato schematicamente in Fig. 5.15. Una spira di area A , immersa in un campo magnetico \vec{B} uniforme, viene ruotata con frequenza ν intorno ad un asse fisso, perpendicolare al campo \vec{B} . Il flusso del campo \vec{B} concatenato con la spira varia sinusoidalmente nel tempo

$$\Phi(t) = BA \cos(2\pi\nu t). \quad (5.52)$$

La variazione del flusso genera nella spira una forza elettromotrice indotta alternata

$$-\frac{d\Phi}{dt} = \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin(2\pi\nu t). \quad (5.53)$$

Se la spira è chiusa, l'energia necessaria per mantenere la rotazione viene dissipata per effetto Joule. Se la spira è aperta e collegata ad un circuito esterno, l'energia può venire sfruttata da un utilizzatore; schematicamente, è questo il principio di funzionamento dei generatori industriali di corrente alternata.

Ad esempio, in una centrale idro-elettrica una bobina immersa in un campo magnetico viene fatta ruotare a velocità costante a spese dell'energia fornita dalla massa d'acqua in caduta.

5.6.5 Autoinduzione di un circuito

Abbiamo visto sopra come la variazione del flusso di un campo magnetico esterno, generato ad esempio da un circuito a percorso da corrente, induce una forza elettromotrice in un altro circuito b .

Vogliamo ora considerare il fenomeno dell'autoinduzione. Un circuito a percorso da corrente I_a genera un campo magnetico \vec{B} nello spazio circostante; se la corrente I_a varia, varia anche il campo \vec{B} , e varia il flusso Φ_B concatenato con il circuito a stesso. Nel circuito a si genera perciò una forza elettromotrice autoindotta, che si oppone alla variazione di corrente I_a .

Per descrivere in modo quantitativo il fenomeno dell'autoinduzione, consideriamo un esempio particolarmente importante, cioè il caso in cui la corrente I_a scorra in un solenoide (Fig. 5.12).



Figura 5.15: Una spira rettangolare posta in rotazione in un campo uniforme \vec{B} è sede di una corrente di verso alternato (a sinistra). Se la spira è aperta e connessa ad un circuito esterno, il dispositivo può essere utilizzato come generatore di corrente alternata.

Induttanza di un solenoide

Consideriamo un solenoide di lunghezza ℓ e sezione A costituito da N spire, che corrispondono a $n = N/\ell$ spire per unità di lunghezza. Come abbiamo già visto, una corrente I produce, nella regione centrale del solenoide, un campo uniforme di induzione magnetica

$$B = n\mu_0 I. \quad (5.54)$$

Il flusso concatenato con ogni spira del solenoide è $\Phi_B = BA$, per cui il flusso totale concatenato con il solenoide è

$$N\Phi_B = n\ell BA = n^2\mu_0 I\ell A. \quad (5.55)$$

Il rapporto tra il flusso totale $N\Phi_B$ e la corrente I si chiama *induttanza* L (o coefficiente di autoinduzione):

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} = n^2\mu_0\ell A. \quad (5.56)$$

Autoinduzione in un solenoide

Se facciamo variare la corrente I che scorre nel solenoide, otteniamo una variazione del campo \vec{B} e del flusso totale concatenato $N\Phi_B$. Alla variazione del flusso corrisponde però, come sappiamo, lo sviluppo di una forza elettro-motrice

$$\mathcal{E} = -\frac{dN\Phi_B}{dt} = -L\frac{dI}{dt}. \quad (5.57)$$

La forza elettromotrice si oppone alla variazione dell'intensità di corrente; l'entità della *f.e.m.* è proporzionale all'induttanza L . L'induttanza misura quindi l'*inerzia* del circuito rispetto alla variazione della corrente che lo percorre.

In realtà, qualsiasi circuito (non solo un solenoide) è caratterizzato da induttanza, cioè presenta un certo grado di inerzia rispetto alla variazione della corrente elettrica. I solenoidi, per la loro forma, presentano valori particolarmente elevati di induttanza. Un solenoide, o un generico dispositivo che presenti un significativo valore di induttanza ed sia specificamente utilizzato per creare un'inerzia alla variazione di corrente, è detto *induttore*.

Energia immagazzinata in un solenoide

Vogliamo ora misurare il lavoro che è necessario fare per instaurare una corrente di intensità I in un solenoide (o in generale, in un circuito caratterizzato da induttanza L). Supponiamo, per focalizzare meglio l'attenzione sul fenomeno dell'autoinduzione, che la resistenza del circuito sia trascurabile. Come abbiamo visto, ogni variazione di corrente induce una forza elettromotrice

$$\mathcal{E} = -L\frac{dI}{dt}. \quad (5.58)$$

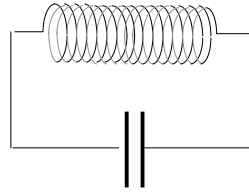


Figura 5.16: Rappresentazione schematica di un circuito LC (induttore + condensatore in serie).

Ciò significa che, per mettere in circolo la carica elementare dq è necessario fare il lavoro elementare

$$dW_{\text{ext}} = -\mathcal{E} dq = L \frac{dI}{dt} dq = L \frac{dq}{dt} dI = LI dI. \quad (5.59)$$

Il lavoro finito per instaurare da zero la corrente I si ottiene integrando:

$$W_{\text{ext}} = \int_0^I LI' dI' = \frac{1}{2} LI^2. \quad (5.60)$$

Il circuito percorso da una corrente I pertanto ha immagazzinato un'energia

$$E_L = \frac{1}{2} LI^2. \quad (5.61)$$

È utile confrontare un induttore con un condensatore. Entrambi i dispositivi sono in grado di immagazzinare energia, l'induttore quando è percorso da corrente I , il condensatore quando le sue armature hanno carica $\pm q$:

$$E_L = \frac{1}{2} LI^2, \quad E_C = \frac{1}{2} \frac{1}{C} q^2. \quad (5.62)$$

5.6.6 Il circuito oscillante LC

Inseriamo nello stesso circuito in serie un induttore (un solenoide) di induttanza L e un condensatore di capacità C (Fig. 5.16). Supponiamo che la resistenza del circuito sia trascurabile, $R = 0$.

Inizialmente sul condensatore è depositata una carica q , per cui nel condensatore è immagazzinata un'energia $E_C = q^2/2C$. Il condensatore tende a scaricarsi attraverso il circuito; la corrente di scarica si instaura però gradualmente, in quanto l'induttore oppone un'inerzia all'aumento della corrente. Quando il condensatore è completamente scarico, $q = 0$, nel circuito scorre una corrente I . L'energia inizialmente immagazzinata nel campo elettrico del condensatore si è trasformata in energia immagazzinata nel campo magnetico dell'induttore, $E_L = LI^2/2$.

L'inerzia dell'induttore fa sì che la corrente non si arresti istantaneamente, ma continui a scorrere con intensità decrescente, causando la progressiva ricarica del condensatore, con segno opposto alla carica iniziale. L'energia $E_L = LI^2/2$ si riconverte in energia $E_C = q^2/2C$.

In assenza di resistenza, il processo si ripete indefinitamente, dando origine ad un *circuito oscillante*: il valore della carica q e la corrente I variano nel tempo con legge sinusoidale, con frequenza $\nu = 1/(2\pi\sqrt{LC})$.

È evidente l'analogia tra un circuito elettrico oscillante e un dispositivo meccanico costituito da una massa m connessa ad un'estremità di una molla di costante elastica k . In questo caso, la posizione x della massa varia nel tempo con legge sinusoidale, e l'energia si trasforma alternativamente da cinetica, $mv^2/2$, a potenziale, $kx^2/2$.

Come la massa m misura l'inerzia meccanica, così l'induttanza L misura l'inerzia rispetto al passaggio di corrente. L'induttore è l'analogo elettrico della massa, il condensatore è l'analogo elettrico della molla.

Applicazioni del circuito elettrico oscillante:

- misurazione del tempo (orologi elettrici)
- filtro di frequenza nei circuiti elettronici
- alimentazione di un'antenna emettitrice di onde elettromagnetiche
- circuito sintonizzatore per la ricezione di segnali trasportati da onde elettromagnetiche